Nom: 2ème partie Classe : 5 A - B

F. Mélotte

Institut Sainte-Ursule 16 Juin 2008

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUE (MATH 4H)

Instructions :
- Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre. T**racer une ligne entre chaque question**.
- Tout résultat doit être justifié clairement et complètement.
- La calculatrice **n'est pas autorisée**.

- Analyse

1. Déterminer une équation cartésienne de la tangente aux deux courbes suivantes au point d'abscisse a.

   a) $f(x) = tg(x)$ et $a = \frac{\pi}{4}$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $a = 0$

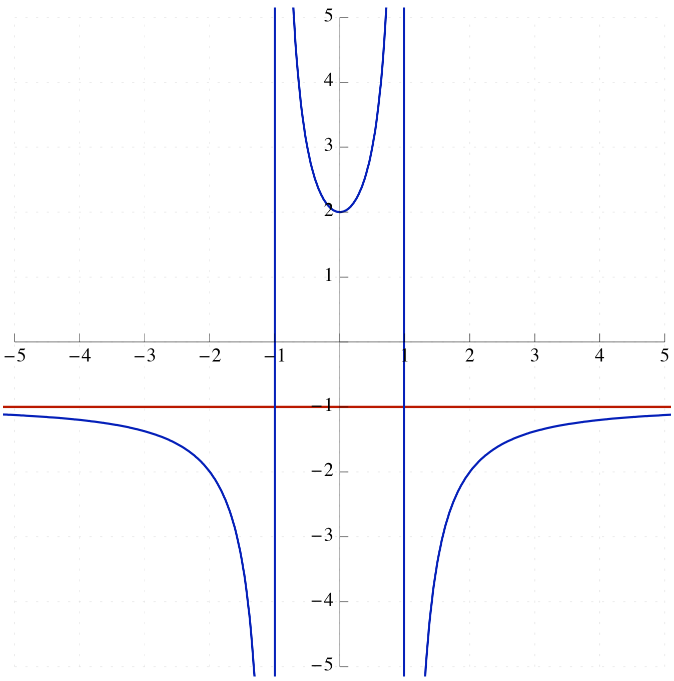
2. Justifier la formule de dérivation de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

3. Etudier la croissance de la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - x$

Donner les coordonnées des éventuels extrémums.

4. Voici le graphe cartésien d'une fonction f.

Dresser le tableau de signe de la dérivée de f(x)



5. Faites l'étude complète de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Bon travail!

Solutions

- Analyse

1. Déterminer une équation cartésienne de la tangente aux deux courbes suivantes au point d'abscisse a.

a) f(x) = tg(x)   et a = $\frac{\pi}{4}$

$y = 2x + \frac{2-\pi}{2}$

b) f(x) = $\sqrt[3]{x}$ et a = 0

x = 0

2. Justifier la formule de dérivation de la fonction f(x) = $\sqrt{x}$.

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3. Etudier la croissance de la fonction f(x) = $x^3 + x^2 - x$

Donner les coordonnées des éventuels extrémums.

f'(x) = $3x^2 + 2x - 1$

x		-1		$\frac{1}{3}$	
$3x^2+2x-1$	+	0	−	0	+

Max : $(-1,1)$

Min : $(\frac{1}{3},-\frac{5}{27})$

4. Voici le graphe cartésien d'une fonction f.

Dresser le tableau de signe de la dérivée de f(x)

x		-1		0		1	
$f'(x)$	−	|	−	0	+	|	+

5. Faites l'étude complète de la fonction f(x) = $\dfrac{x^2}{x-1}$

f(x) = $\dfrac{x^2}{x-1}$

1. Domaine de définition

Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. Signe de f

x		0		1	
$\frac{x^2}{x-1}$	$-$	0	$-$	||	$+$

3. Limites et asymptotes

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2}{x-1} = \infty \end{cases}$$

AV ≡ $x = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

AO ≡ $y = x + 1$

4. Intersection avec les axes

Gf $\cap$ X = { (0,0) }

Gf $\cap$ Y = { (0,0) }

5. Etude de f'

f'(x) = $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

x		0		1		2	
$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$

Max : (0,0)

Min : (2,4)

6. Etude de f''

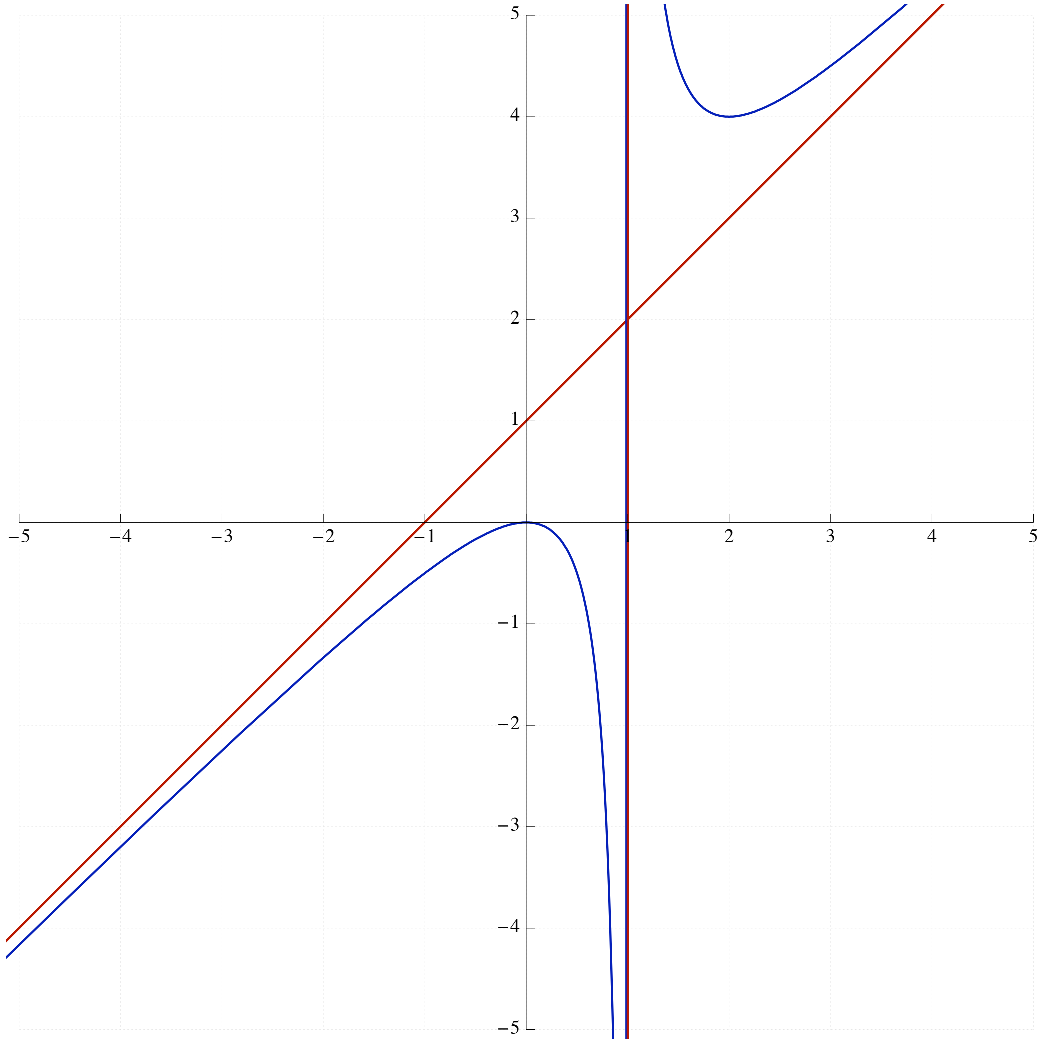
f''(x) = $\dfrac{2}{(x-1)^3}$

x		1	
$\frac{2}{(x-1)^3}$	$-$	||	$+$

7.Tableau récapitulatif

x	$-\infty$		0		1		2		∞
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	|	$+$	4	$+$	∞
	$y = x + 1$		Max				Min		$y = x + 1$
pente	1	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	1
concavité	0	$-$	-2	$-$	|	$+$	2	$+$	0

8. Graphe de f



5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5