

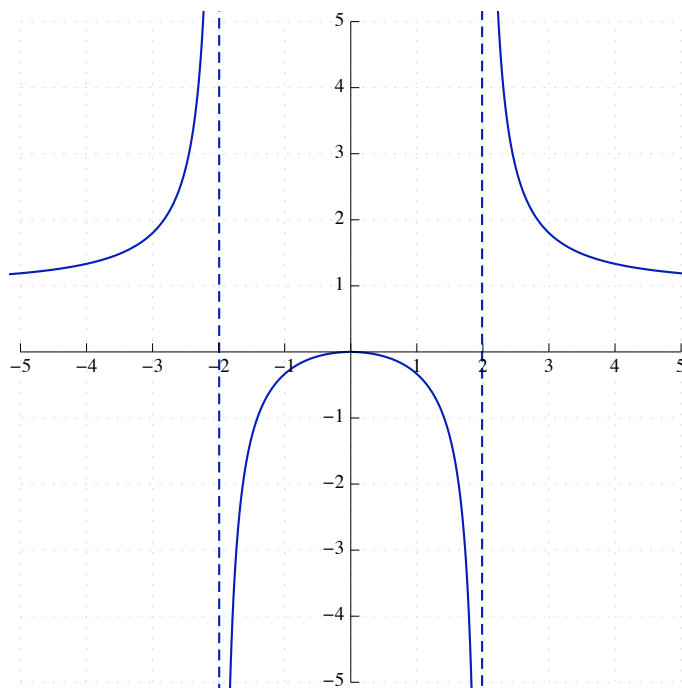
CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUE (MATH 4H)

Instructions :

- Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre. **Tracer une ligne entre chaque question.**
- Tout résultat doit être justifié clairement et complètement.
- La calculatrice **n'est pas autorisée.**

■ Analyse

- (1) 1. A l'aide de la définition de nombre dérivé, déterminer la formule de dérivation de la fonction $f(x) = x^3$.
- (1) 2. Voici le graphe cartésien d'une fonction f .
- Dresser le tableau de signe de la dérivée de $f(x)$.
 - Dresser le tableau de signe de la dérivée seconde de $f(x)$.



- (2) 3. Calculer les dérivées suivantes
- $\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)'$
 - $(\cos 3x)'$
- (2) 4. Soit $f(x) = \sqrt{2x+1}$.
- Donner le domaine de définition de f .
 - Déterminer une équation cartésienne des tangentes à cette fonction aux points d'abscisse 0 et $-1/2$.
 - Montrer que cette fonction n'admet pas d'asymptote horizontale.
 - Etudier la croissance de f .
 - Dessiner le graphe de la fonction et y représenter les tangentes calculées.
- (3) 5. Soit la fonction homographique $f(x) = \frac{x+k}{x-1}$. Quelle condition poser sur la constante réelle k afin que la fonction soit croissante sur $\left] -\infty, 1[\right.$ et sur $\left.] 1, +\infty \right[$?
- (3) 6. L'expression $N(t) = 8.1t^2 - 0.9t^3$ représente la note d'examen d'un élève en fonction du temps d'étude t exprimé en heures ($0 \leq t \leq 9$). Trouver le temps d'étude qui maximise sa note.
- (3) 7. Comment partager une somme de 40 € entre Marc et Alain de telle manière que le produit du cube de la part de Marc par celle d'Alain soit le plus grand possible.

Bon travail!

Solutions

■ Analyse

- (1) 1. A l'aide de la définition de nombre dérivé, déterminer la formule de dérivation de la fonction $f(x) = x^3$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2$$
$$(x^3)' = 3x^2$$

- (1) 2. Voici le graphe cartésien d'une fonction f .

a) Dresser le tableau de signe de la dérivée de $f(x)$.

b) Dresser le tableau de signe de la dérivée seconde de $f(x)$.

a)

x		-2		0		2	
$f'(x)$	+		+	0	-		-

b)

x		-2		2	
$f''(x)$	+		-		+

- (2) 3. Calculer les dérivées suivantes

a) $\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)'$

b) $(\cos 3x)'$

a) $f'(x) = -\frac{2(x+1)}{x^3}$

b) $f'(x) = -3 \sin(3x)$

- (2) 4. Soit $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

a) Donner le domaine de définition de f .

b) Déterminer une équation cartésienne des tangentes à cette fonction aux points d'abscisse 0 et $-1/2$.

c) Montrer que cette fonction n'admet pas d'asymptote horizontale.

d) Etudier la croissance de f .

e) Dessiner le graphe de la fonction et y représenter les tangentes calculées.

a) $\text{Dom } f = [-\frac{1}{2}, \rightarrow$

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$$T_0 \equiv y - 1 = x$$

$$T_{-1/2} \equiv y = x + 1$$

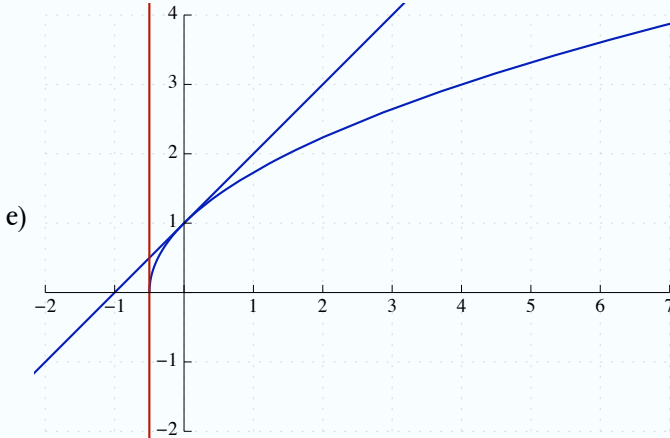
$$T_{-1/2} \equiv x = -1/2$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$

d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

x		$-\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$	/		+

La fonction est strictement croissante sur son domaine.



- (3) 5. Soit la fonction homographique $f(x) = \frac{x+k}{x-1}$. Quelle condition poser sur la constante réelle k afin que la fonction soit croissante sur $-\infty, 1[$ et sur $]1, \infty$?

$$f'(x) = \frac{x-1-x-k}{(x-1)^2} = \frac{-1-k}{(x-1)^2}$$

La dérivée doit être positive pour avoir une fonction croissante.

Comme $(x-1)^2$ est positif, il suffit que le numérateur le soit aussi.

Il faut donc que $-1-k > 0$

c-à-d $k < -1$

autre méthode:

On a à faire à une fonction homographique, qui est toujours soit croissante ($\frac{-1}{x}$) soit décroissante ($\frac{1}{x}$)

$$f(x) = \frac{x-1+1+k}{x-1} = 1 + \frac{k+1}{x-1}$$

Il faut donc que $k+1 < 0$ c-à-d que $k < -1$

- (3) 6. L'expression $N(t) = 8.1t^2 - 0.9t^3$ représente la note d'examen d'un élève en fonction du temps d'étude t exprimé en heures ($0 \leq t \leq 9$). Trouver le temps d'étude qui maximise sa note.

$$N'(t) = 16.2t - 2.7t^2 = 0$$

on obtient $t = 0$ ou $t = 6$

t		0		6.	
$16.2t - 2.7t^2$	-	0	+	0	-

Le temps d'étude qui maximise la cote est de 6 heures

- (3) 7. Comment partager une somme de 40 € entre Marc et Alain de telle manière que le produit du cube de la part de Marc par celle d'Alain soit le plus grand possible.

Soit x la part de Marc et y la part d'Alain.

Il faut que $x^3 y$ soit maximum, sachant que $x + y = 40$ c-à-d $y = 40 - x$

On obtient la fonction $f(x) = x^3 (40 - x) = 40x^3 - x^4$.

$$f'(x) = 120x^2 - 4x^3$$

x		0		30	
$120x^2 - 4x^3$	+	0	+	0	-

On trouve $x = 30$ et donc $y = 40 - 30 = 10$