

■ NOM:

- Instructions :
- Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
 - Ne pas répondre sur le questionnaire.
 - Répondre aux questions dans l'ordre.
 - Tout résultat doit être **justifié clairement et complètement**.
 - Tracer une ligne entre chaque question.
 - **La calculatrice est autorisée.**

Analyse

(2) 1. On considère la fonction $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 7x + 10}}$. Déterminer son domaine de définition et ses éventuelles racines.

CE: $x^2 + 7x + 10 > 0$

x		-5		-2	
$x^2 + 7x + 10$	+	0	-	0	+

dom $f = \leftarrow, -5[\cup] -2, \rightarrow$

racines: $x^3 - 3x + 2 = 0$

factorisation : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2)$

le numérateur s'annule donc pour $x = 1$ et pour $x = -2$

vu le domaine, seule la valeur 1 est racine de la fonction.

(1) 2. La relation réelle qui à x fait correspondre y tel que $x^2 + y^2 = 4$ est-elle une fonction ? Justifier.

prenons $x = 0$

on a alors $y^2 = 4$ et donc $y = \pm 2$

on obtient donc 2 images pour une valeur de x

or, pour avoir une fonction, il faut maximum une image pour chaque x

ce n'est donc pas une fonction

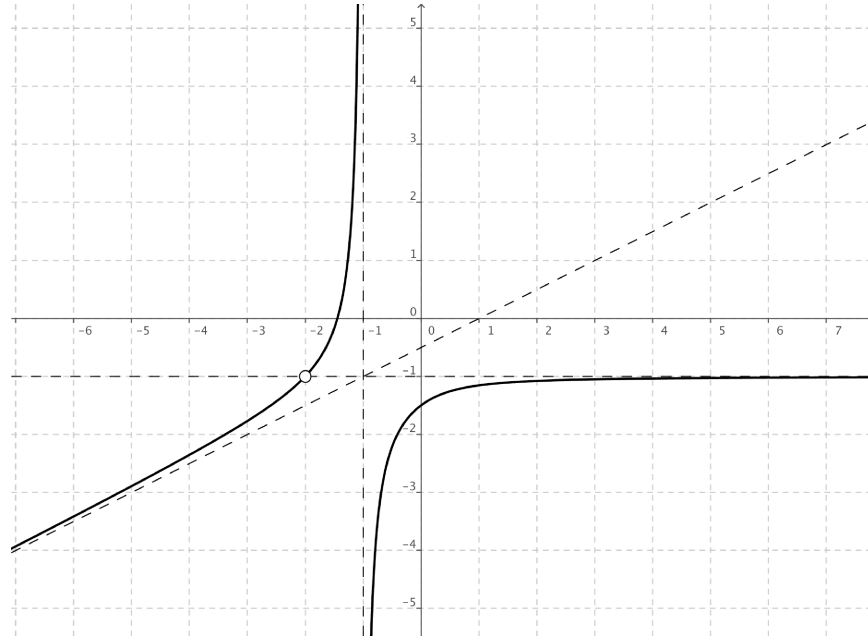
(2) 3. Pour la fonction f dont le graphe cartésien est représenté ci-dessous, déterminer

- a) dom f
- b) Im f
- c) la croissance de f

2 |

d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

e) les éventuelles asymptotes et les limites associées



a) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

b) $\text{im } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) f est strictement croissante sur $\leftarrow, -2[$, sur $] -2, -1[$ et sur $] -1, \rightarrow$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

AV $\equiv x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \quad \text{AH} \equiv y = -1 \text{ à droite}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{AO} \equiv y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \text{ à gauche}$$

- (1) 4. Justifier la formule calculant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. Appliquer cette formule à la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $1/2$ en calculant S_{10} .

Justification: voir cours...

$$t_1 = 1 \text{ et } q = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \frac{1023}{512} = 1.99805$$

- (3) 5. Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :

- le premier mètre coûte 160 €
- le mètre suivant coûte 8 € de plus que le précédent.

Quel sera le coût d'un forage à une profondeur de 100 m ?

Quelle profondeur pourra atteindre le forage si l'on dispose d'un crédit que 17800 € ?

Définir une suite pour résoudre ce problème et expliquer votre démarche.

c'est une suite arithmétique de 1er terme 160 et de raison $r = 8$

on recherche S_{100}

$$t_{100} = 160 + 99 \times 8 = 952$$

$$S_{100} = 100 \frac{t_1 + t_{100}}{2} = 50 (160 + 952) = 55600$$

Le coût pour un forage à une profondeur de 100 m sera de 55600 €.

$$S_n = 17800$$

$$S_n = n \frac{t_1 + t_n}{2} = \frac{n}{2} (160 + 160 + (n-1)8) = 17800$$

$$\frac{n}{2} (320 + 8n - 8) = 17800$$

$$n(160 + 4n - 4) = 17800$$

$$156n + 4n^2 = 17800$$

$$4n^2 + 156n - 17800 = 0$$

$$\Delta = 309136 = 556^2$$

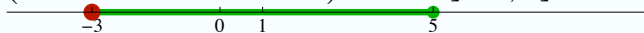
$$n = 50$$

le forage atteindra donc 50 mètres avec un budget de 17800 €

- (1) 6. On considère l'ensemble $E =]-3, 5]$. Les réels -3 et 8 adhèrent-ils à E ? Justifier.

Le réel -3 adhère à E .

Il faut montrer que tout intervalle ouvert centré en -3 , noté $] -3 - r, -3 + r[$ a des éléments communs (une intersection non vide) avec $E =]-3, 5]$.



Montrons que $] -3 - r, -3 + r[$ et $E =]-3, 5]$ ont des éléments en commun c-à-d que

$$]-3 - r, -3 + r[\cap E \neq \emptyset$$



En effet, si r est suffisamment petit, $] -3 - r, -3 + r[\cap E =]-3, -3 + r[\neq \emptyset$

Le réel 8 n'adhère pas à E .

Il faut montrer qu'il existe un intervalle ouvert centré en 8 ayant une intersection vide avec $E =]-3, 5]$.



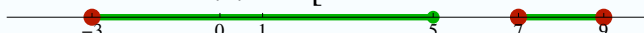
Il suffit par exemple de prendre 1 comme rayon de l'intervalle ouvert centré en 8 .

Cela nous donne l'intervalle ouvert $] 7, 9[$



Il reste à voir que cet intervalle n'a pas d'élément commun avec l'ensemble E , c'est-à-dire que

$$]-3, 5[\cap] 7, 9[= \emptyset$$



ce qui est évident.

- (1) 7. A l'aide de la définition, justifier la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x - 5 = -7$$

Il faut montrer que

a) -1 adhère à $\text{dom } f = \mathbb{R}$ (évident)

b) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - (-1)| \leq \delta \implies |2x - 5 - (-7)| \leq \epsilon$

il faut trouver, pour tout réel $\epsilon > 0$, un réel $\delta > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - (-1)| \leq \delta \implies |2x - 5 - (-7)| \leq \epsilon$$

c-à-d

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq \delta \implies |2x + 2| \leq \epsilon$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq \delta \implies 2|x + 1| \leq \epsilon$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq \delta \implies |x + 1| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

on voit que l'implication est évidente si $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Il suffit donc de choisir $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

BON TRAVAIL !

■ NOM:

- Instructions :
- Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
 - Ne pas répondre sur le questionnaire.
 - Répondre aux questions dans l'ordre.
 - Tout résultat doit être **justifié clairement et complètement**.
 - Tracer une ligne entre chaque question.
 - La calculatrice n'est pas autorisée.

- (3) 8. On considère la fonction $f(x) = \frac{ax-1}{x+b}$ où a et b sont réels. Quelles valeurs donner à a et b pour que cette fonction admette une asymptote verticale $AV \equiv x = 2$ et une asymptote horizontale $AH \equiv y = 3$? Expliquer votre raisonnement.

On peut obtenir une indétermination $\left[\frac{k}{0}\right] = \pm \infty$ pour la limite en 2 si 2 annule le dénominateur. On choisit donc $b = -2$. Si on calcule la limite de f en ∞ , on obtient a . Il faut donc que $a = 3$ pour obtenir l'asymptote horizontale voulue.

- (1) 9. Calculer la limite suivante en justifiant et expliquant la méthode utilisée.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + 3x - 5$$

On met en évidence le terme de degré le plus élevé.
On remarque alors que le contenu de la parenthèse tend vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + 3x - 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 \left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{5}{2x^2}\right) = +\infty$$

- (2) 10. Calculer

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-5} - 2}{2x-6}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-5} - 2}{2x-6} = \frac{3}{8}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-5} - 2}{2x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x-5} - 2)(\sqrt{3x-5} + 2)}{2(x-3)(\sqrt{3x-5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-9}{2(x-3)(\sqrt{3x-5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2(\sqrt{3x-5} + 2)} = \frac{3}{8}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$$

- (2) 11. Déterminer les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes

a) $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{2x-1}$

a) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1} = \left[\frac{6}{0} \right]$$

x		-2		$\frac{1}{3}$		1	
$3x^2 + 5x - 2$	+	0	-	0	+	6	+
$x - 1$	-	-3	-	$-\frac{2}{3}$	-	0	+
$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1}$	-	0	+	0	-		+

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1} = -\infty \\ < \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1} = +\infty \\ > \end{cases} \quad \text{AV} \equiv x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

pas d'AH

AO $\equiv y = ax + b$?

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x-1} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 2}{x-1} = 8$$

les limites sont les mêmes vers $-\infty$

$$\text{AO} \equiv y = 3x + 8$$

b) $\text{dom } f = [-3, \rightarrow) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x+3}}{2x-1} = \left[\frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{0} \right]$$

x		-3		$\frac{1}{2}$	
$\sqrt{x+3}$		0	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$\frac{\sqrt{x+3}}{2x-1}$		0	-		+

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x+3}}{2x-1} = -\infty \\ < \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x+3}}{2x-1} = +\infty \\ > \end{cases} \quad \text{AV} \equiv x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x} = 0 \quad \text{AH} \equiv y = 0 \text{ à droite}$$

(3) 12. VRAI ou FAUX ? Justifier!

a) Une fonction ne peut admettre plus d'une asymptote verticale.

b) Une fonction paire admet un nombre pair de racines.

c) Une fonction impaire ne peut avoir la même asymptote horizontale à gauche et à droite.

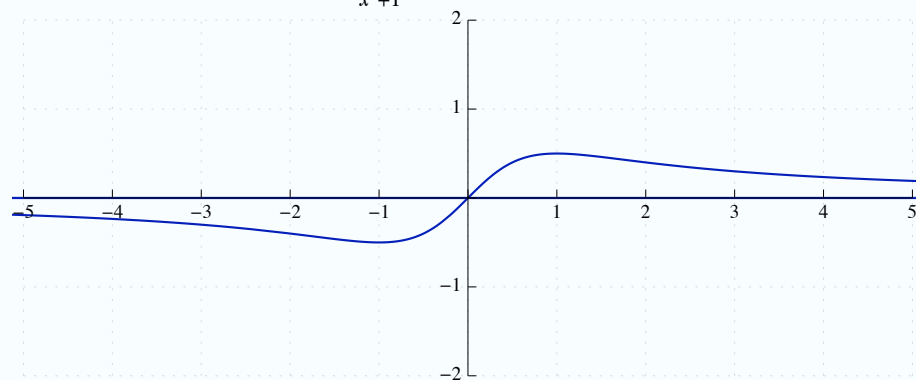
a) faux, une fonction peut admettre n'importe quel nombre d'AV.

par exemple, $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ admet deux asymptotes verticales $x = 1$ et $x = -1$

b) faux, par exemple $f(x) = x^2$ est paire et admet une seule racine, 0

c) faux

par exemple, la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ est impaire et admet la même AH à droite et à gauche, $y = 0$



bon travail !