INSTITUT SAINTE URSULE

Bilan de mathématique - 6èmeannée - MATH 4H - PARTIE 1

F. MELOTTE
NOEL 2008

■ NOM: ....

Instructions : - Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre.
- Tout résultat doit être **justifié clairement et complètement**.
- Tracer une ligne entre chaque question.
- **La calculatrice est autorisée.**

Analyse

(1) 1. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est-elle une injection ? Justifier
Donner une expression algébrique de sa réciproque. Que conclure?

$f(x)$ n'est pas une injection car $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :\ x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.
En effet, prenons $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$.On a alors $f(x_1) = \frac{1}{2} = f(x_2)$.

(1) 2. Résoudre l'inéquation suivante en justifiant chaque étape de la résolution.

$$1 + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 2 \log_{\frac{1}{3}}(2)$$

$1 + \log_{1/3}(x-1) \leq 2 \log_{1/3} 2$
CE: $x > 1$
propriété: $\log_a a = 1$
$\log_{1/3} \frac{1}{3} + \log_{1/3}(x-1) \leq 2 \log_{1/3} 2$
propriété: $\log_a x + \log_a y = \log_a(x.y)$
$\log_{1/3} \frac{x-1}{3} \leq 2 \log_{1/3} 2$
propriété: $r \log_a x = \log_a x^r$
$\log_{1/3} \frac{x-1}{3} \leq \log_{1/3} 4$
$\log_{1/3} x$ est une fonction strictement décroissante
$\frac{x-1}{3} \geq 4$
$x - 1 \geq 12$
$x \geq 13$
$S = [13, \longrightarrow$

(1) 3. Justifier la propriété des logarithmes permettant de changer de base et utiliser cette propriété pour calculer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de $\log_3 20$.

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
Justification: voir cours...
$\log_3 20 = \frac{\ln 20}{\ln 3} = \frac{2.99573}{1.09861} = 2.72683$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\log_3(x) + \log_3(x-2) \leq 2\log_3(2)$

b) $4^x - 3\,2^x - 2^2 = 0$

a) $S =]\,2, 1 + \sqrt{5}\,]$
b) $S = \{2\}$

(2) 5. On considère la fonction $f(x) = \ln(4\,x^2 - 1)$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Dériver la fonction f.

a) Le domaine de la fonction ln étant $\mathbb{R}_0^+$, la condition d'existence est $4\,x^2 - 1 > 0$.

Le tableau de signe donne

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$4\,x^2 - 1$	+	0	−	0	+

Le domaine est donc $\longleftarrow, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \longrightarrow$

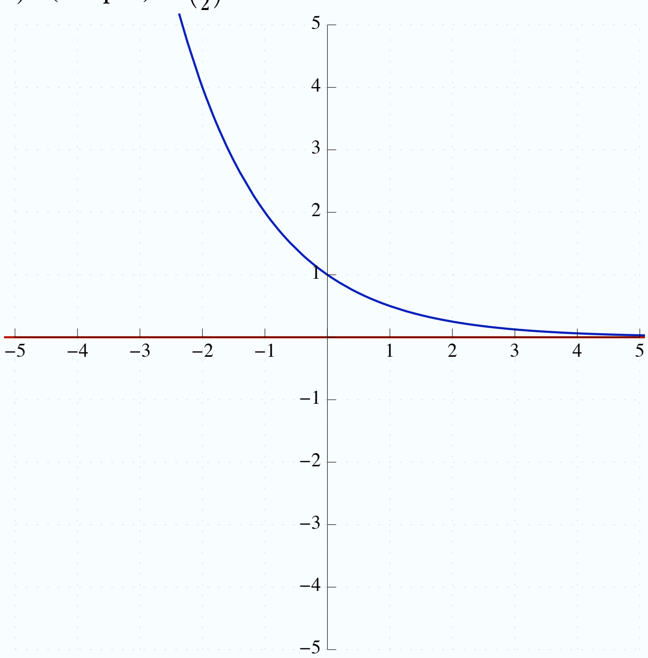
b) $\left(\ln\left(4\,x^2 - 1\right)\right)' = \frac{1}{4\,x^2-1}\left(4\,x^2 - 1\right)' = \frac{8\,x}{4\,x^2-1}$

(3) 6. On joue plusieurs parties successives de pile ou face. 

a) Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" 5 fois de suite ?
b) Quelle est la fonction exprimant la probabilité d'obtenir "pile" x fois de suite ?
Faites le graphe cartésien de cette fonction.
c) A partir de combien de lancers la probabilité de n'obtenir que des "pile" devient-elle plus petite que 1% ?

a) $P(5 \times \text{pile}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0.03125$

b) $P(x \times \text{pile}) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



c) Il faut que $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{100}$

$2^{-x} < 10^{-2}$

$2^{-x} < 2^{\log_2 10^{-2}}$

$-x < \log_2 10^{-2}$

$x > 2\log_2 10$

$x > 6.64386$

Il faut donc 7 lancers pour que la probabilité devienne inférieure à 1%.

INSTITUT SAINTE URSULE

Bilan de mathématique - $6^{\text{ème}}$année - MATH 4H - PARTIE 2

F. MELOTTE

NOEL 2008

■ NOM: ....

Instructions : - Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre.
- Tout résultat doit être **justifié clairement et complètement**.
- Tracer une ligne entre chaque question.
- **La calculatrice n'est pas autorisée.**

Géométrie

(2) 1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A:(1,2,-1)$, $B:(2,\ 1,\ 1)$ et $C:(-1,0,2)$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan ABC.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan α parallèle à ABC et comprenant le point $P:(2,\ -1,\ 1)$

> a) ABC $\equiv\ x+7\,y-4\,z=-9$
> b) $\alpha\equiv\ x-7\,y-4\,z=5$

(1) 2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la droite DE passant par $D:(2,\ 0,\ 1)$ et $E:(1,\ -1,\ 2)$.

a) Qu'est-ce qu'un vecteur directeur d'une droite dans l'espace? Donner un vecteur directeur de la droite DE.
b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite DE.
c) La droite DE est-elle orthogonale au plan $\pi\equiv\ x+y-z==2$? Expliquer.

> a) $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}:(-1,-1,1)$
> Un vecteur directeur est un vecteur parallèle à la droite.
> b) $\begin{cases} x=2-k \\ y=-k \\ z=1+k \end{cases}$
> c) Oui. Le vecteur $(1,\ 1,\ -1)$ est un vecteur normal du plan π. Or, c'est aussi un vecteur directeur de la droite DE.

(1) 3. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite parallèle à l'axe des ordonnées et comprenant le point $M:(1,\ 2,\ -3)$. Expliquer votre démarche.

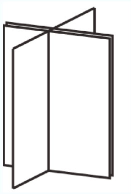
> L'axe des ordonnées a pour équations cartésiennes $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ où $x=0$ est une équation cartsienne du plan oyz et $z=0$ une équation cartésienne du plan oxy.
> Prenons les deux plans parallèles à ces deux plans et comprenant le point M. Nous avons alors
> $\begin{cases} x=1 \\ z=-3 \end{cases}$

4. Exactement un des trois systèmes suivants est déterminé (la solution est un point):

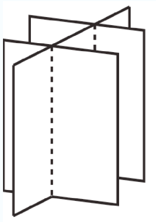
❶ $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+4y-6z=2 \\ 2x-4y+6z=2 \end{cases}$ ❷ $\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 2x+2y-6z=4 \\ x+y-3z=1 \end{cases}$ ❸ $\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ x-2y+3z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

a) Lequel des trois? Calculer sa solution.
b) Quelle est la nature des autres systèmes? En donner une interprétation géométrique.

a) C'est le troisième système.
La solution est le point $(\frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4})$
b) Le 1er système comporte deux plans parallèles confondus. La solution est donc la droite $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+4y-6z=2 \end{cases}$



Le 2ème comporte deux plans parallèles distincts. La solution est donc l'ensemble vide.



BON TRAVAIL !