Bilan de mathématique - $6^{\text{ème}}$année - MATH 6H - PARTIE 1

MATH 6 *H*
F. MELOTTE
NOEL 2008

■ NOM: ....

Instructions : - Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre.
- Tout résultat doit être **justifié clairement et complètement**.
- Tracer une ligne entre chaque question.
- **La calculatrice est autorisée.**

Analyse

(1) 1. Développer la démarche qui permet de définir la fonction Arctg.
Dresser un graphe cartésien soigné de cette fonction.
Déterminer sa dérivée.

> voir cours...

(1) 2. Vérifier que $\forall\, x \in [-1, 1]$: $\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$

> On sait que $\forall\, x \in [-1, 1]$: $\cos(\text{Arccos}\, x) = x$ et $\sin(\text{Arcsin}\, x) = x$.
> Dès lors
> $\text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{Arccos}\, x$
> $\Longleftrightarrow \sin(\text{Arcsin}\, x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}\, x\right)$
> $\Longleftrightarrow x = \cos(\text{Arccos}\, x)$
> $\Longleftrightarrow x = x$

(2) 3. Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Arctg}(2\,x)}{\sin(x)}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{e^x}$

> a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Arctg}(2\,x)}{\sin(x)} = 2$
> b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = 0$

(1) 4. Résoudre l'inéquation suivante en justifiant chaque étape de la résolution.

$$1 + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) \leq 2 \log_{\frac{1}{3}}(2)$$

$1+\log_{1/3}(x-1) \leq 2\log_{1/3} 2$
CE: $x > 1$
propriété: $\log_a a = 1$
$\log_{1/3} \frac{1}{3} + \log_{1/3}(x-1) \leq 2\log_{1/3} 2$
propriété: $\log_a x + \log_a y = \log_a(x.y)$
$\log_{1/3} \frac{x-1}{3} \leq 2\log_{1/3} 2$
propriété: $r\log_a x = \log_a x^r$
$\log_{1/3} \frac{x-1}{3} \leq \log_{1/3} 4$
$\log_{1/3} x$ est une fonction strictement décroissante
$\frac{x-1}{3} \geq 4$
$x-1 \geq 12$
$x \geq 13$
$S = [13, \longrightarrow$

(2) 5. On considère la fonction $f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{x}\right)$
a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Dériver $f(x)$

a) dom f $= \longleftarrow, -1] \cup [1, \longrightarrow$
b) $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

(2) 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\log_3(x) + \log_3(x-2) \leq 2\log_3(2)$

b) $4^x - 3\,2^x - 2^2 = 0$

a) $S =]\,2, 1+\sqrt{5}\,]$
b) $S = \{2\}$

(3) 7. On définit les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique comme étant les fonctions
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
a) Calculer la dérivée de sinh. Que constater ?
b) Montrer que $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.

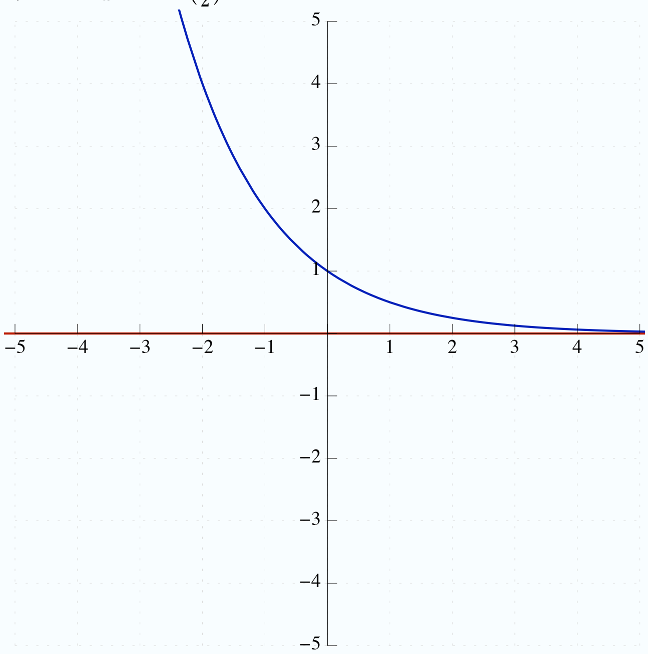
a) $(\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
b) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\,\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$
$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

(3) 8. On joue plusieurs parties successives de pile ou face. 

a) Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" 5 fois de suite ?
b) Quelle est la fonction exprimant la probabilité d'obtenir "pile" x fois de suite ?
c) A partir de combien de lancers la probabilité de n'obtenir que des "pile" devient-elle plus petite que 1% ?

a) $P(5 \times \text{pile}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0.03125$

b) $P(x \times \text{pile}) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



c) Il faut que $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{100}$

$2^{-x} < 10^{-2}$

$2^{-x} < 2^{\log_2 10^{-2}}$

$-x < \log_2 10^{-2}$

$x > 2 \log_2 10$

$x > 6.64386$

Il faut donc 7 lancers pour que la probabilité devienne inférieure à 1%.

INSTITUT SAINTE URSULE

Bilan de mathématique - 6ème année - MATH 6H - PARTIE 2

MATH 6 *H*
F. MELOTTE
NOEL 2008

■ NOM: ....

Instructions : - Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre.
- Tout résultat doit être **justifié clairement et complètement**.
- Tracer une ligne entre chaque question.
- **La calculatrice n'est pas autorisée.**

Géométrie

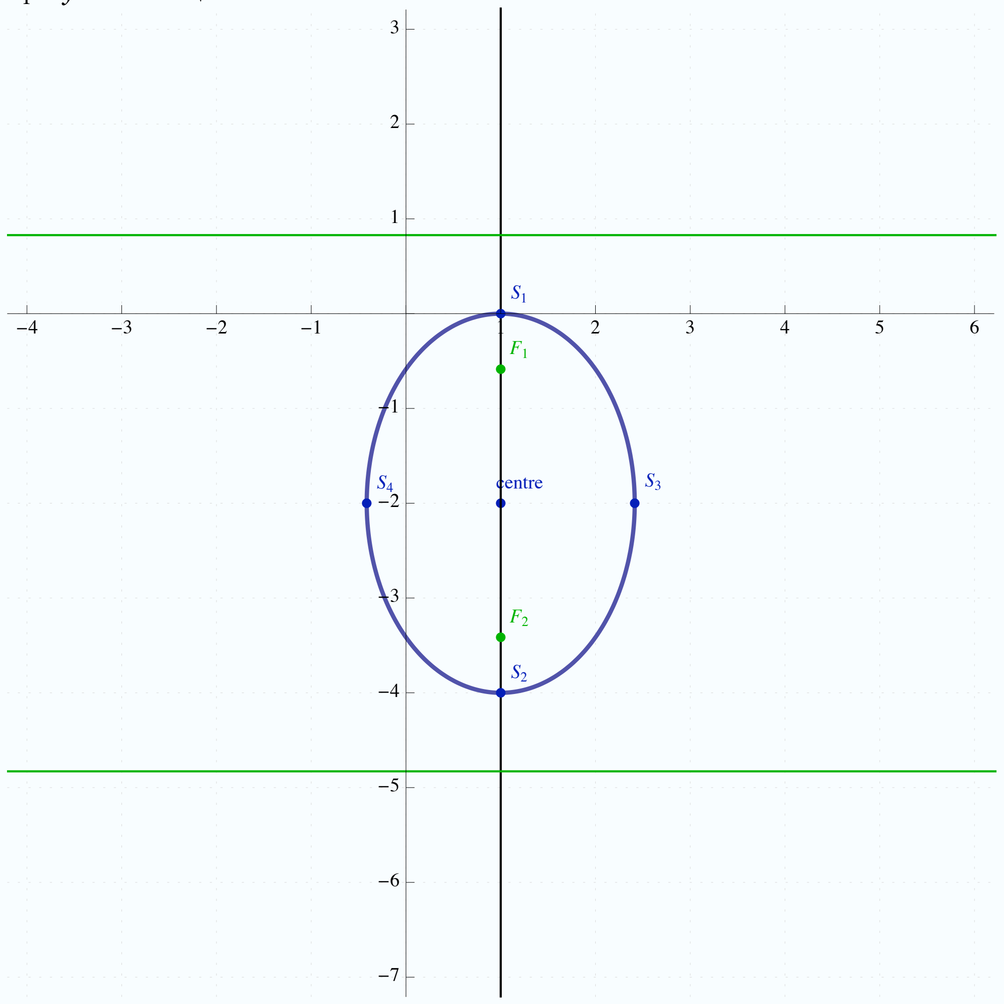
(1) 1. A partir de la définition de conique, retrouver l'équation cartésienne d'une ellipse.

voir cours..

(2) 2. Etudier la conique d'équation $2x^2 - 4x + y^2 + 4y + 2 = 0$. Préciser son excentricité, axe focal, centre, foyer(s), sommet(s), directrice(s) et ses éventuelles asymptotes.
Dresser le graphe cartésien.

$2(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
ellipse
$\epsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$
centre : $(1, -2)$
axe focal: $m \equiv x = 1$
$F_1 : \left(1, -2 + \sqrt{2}\right)$
$F_2 : \left(1, -2 - \sqrt{2}\right)$
$S_1 : (1, 0)$
$S_2 : (1, -4)$
$S_3 : \left(1 + \sqrt{2}, -2\right)$
$S_4 : \left(1 - \sqrt{2}, -2\right)$
$d_1 \equiv y = -2 + 2\sqrt{2}$

$d_1 \equiv y = -2 - 2\sqrt{2}$



(2) 3. On considère la conique d'équation $4x^2 + y^2 = 8$.

a) Exprimer la courbe sous forme de deux fonctions et expliquer ce qu'elles représentent.

b) Déterminer une équation cartésienne des tangentes aux points d'abscisse 1.

a) $y^2 = 8 - 4x^2$

$y = \pm\sqrt{8 - 4x^2}$

on obtient donc 2 fonctions: $f_1(x) = \sqrt{8 - 4x^2} = 2\sqrt{2 - x^2}$ et $f_2(x) = -\sqrt{8 - 4x^2} = -2\sqrt{2 - x^2}$

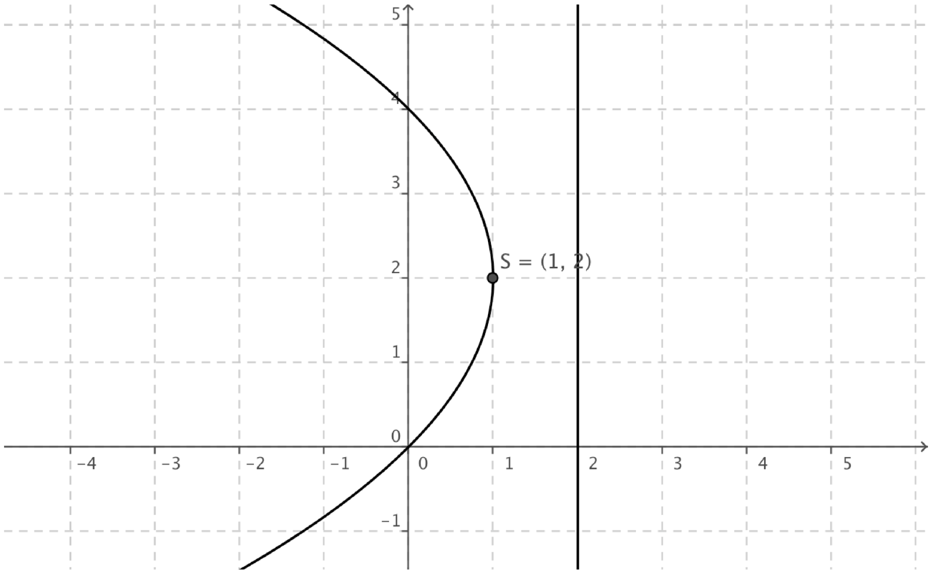
f_1 représente la partie positive de l'ellipse (y positifs) et f_2 la partie négative. (un dessin est le bienvenu...)

b) si $x = 1$, alors $y = \pm\sqrt{8 - 4} = \pm 2$

pour le point $(1, 2)$ la tangente est $4x + 2y = 8$ ou encore $y = 4 - 2x$

pour le point $(1, -2)$ la tangente est $4x - 2y = 8$ ou encore $y = 2x - 4$

4. Donner une équation cartésienne de la parabole suivante. Expliquer votre démarche.



On voit que la parabole est du type $(y-s)^2 = -2\,p\,(x-r)$ où (r, s) est le vecteur de la translation.
Le sommet étant en $(1, 2)$, $(r, s) = (1, 2)$.
L'équation est donc du type $(y-2)^2 = -2\,p\,(x-1)$.
$p/2$ étant la distance entre le sommet et la directrice, on a $p/2 = 1$ et $p = 2$.
L'équation de la parabole est donc $(y-2)^2 = -4\,(x-1)$.
On peut vérifier avec l'abscisse 0:
si $x = 0$, l'équation devient $(y-2)^2 = 4$, c'est-à-dire $y - 2 = \pm 2$
et donc $y = 4$ ou $y = 0$.
La parabole passe bien par les points $(0, 0)$ et $(0, 4)$

bon travail !