**Interrogation de mathématique n°5 - 27-10-2009** **NOM :**

(1) 1. On considère l'intervalle ouvert $]-5, 9[$. Définissez cet intervalle en fonction de son centre et de son rayon.

$\{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 7\}$

(3) 2. A quel ensemble de réels correspond la définition suivante? Justifier!

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| > 2\}$$

$|x-3|$ exprime la distance entre un réel $x$ quelconque et 3
A est donc l'ensemble des réels qui sont à une distance de 3 strictement plus grande que 2
Ce qui peut se représenter comme suit:


Et s'écrire $A = \longleftarrow, -1[ \bigcup ]5, \longrightarrow$

(1) 3. Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Les réels $-2$ et $5$ adhèrent-ils à l'ensemble E? Justifier à l'aide de la définition.

$-2$ adhère à E car
$\forall r > 0$ : $E \bigcap ]-2-r, -2+r[ \neq 0$
en effet, $E \bigcap ]-2-r, -2+r[ =$ ]-2-r,-2+r[ \{-2}

5 adhère à E car
$\forall r > 0$ : $E \bigcap ]5-r, 5+r[ \neq 0$
en effet, $5 \in E$ et $5 \in ]5-r, 5+r[$ et donc 5 appartient à l'intersection et celle-ci est non vide.

(1) 4. Justifier la limite suivante à l'aide de la définition:

$$\lim_{x \to 2} 1 - 3x = -5$$

Il faut montrer que:

* 2 adhère à dom $f = \mathbb{R}$ : trivial

* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \text{dom} f : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x-2| < \delta \Rightarrow |1-3x+5| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x-2| < \delta \Rightarrow |-3x+6| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x-2| < \delta \Rightarrow 3|x-2| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \epsilon/3$

pour que l'implication soit vérifiée, il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

(1) 5. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

a) Que valent les limites de cette fonction en $\pm\infty$ ? Justifier.

b) Que vaut la limite en 0 ? Justifier.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$

On prend des valeurs de $x$ de + en + grandes et on calcule $\frac{1}{x^3}$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10. | 0.001 |
| 1000. | $1. \times 10^{-9}$ |
| $1. \times 10^{6}$ | $1. \times 10^{-18}$ |

On constate que si $x$ continue à augmenter, les valeurs de $y$ se rapprochent de 0.

Il en est de même pour $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^3} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^3} = +\infty \end{cases}$

On prend des valeurs de $x$ se rapprochant de 0 à droite et on calcule $\frac{1}{x^3}$:

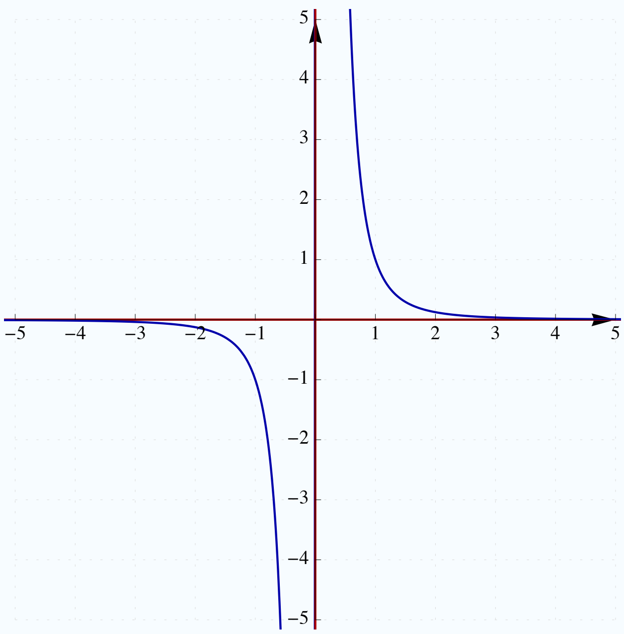
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0.1 | 1000. |
| 0.001 | $1. \times 10^{9}$ |
| $1. \times 10^{-6}$ | $1. \times 10^{18}$ |

On constate que les valeurs de $y$ augmentent indéfiniment.

De même, on prend des valeurs de $x$ se rapprochant de 0 à gauche et on calcule $\frac{1}{x^3}$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-0.1$ | $-1000.$ |
| $-0.001$ | $-1. \times 10^{9}$ |
| $-1. \times 10^{-6}$ | $-1. \times 10^{18}$ |

On constate que les valeurs de $y$ diminuent indéfiniment.



(1) 6. Pour la fonction ci-dessous, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$. Donner et dessiner un intervalle ouvert centré en $a = 2$ vérifiant la condition de la définition de limite pour l'intervalle ouvert centré en $b = 3$ de rayon $\frac{1}{2}$.

Justifier et expliquer!

Il faut donc trouver un intervalle ouvert centré en 2 tel que l'image des réels de cet intervalle se trouve à l'intérieur de l'intervalle $\left]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[$ .

On voit sur le dessin qu'un intervalle de rayon $\frac{1}{4}$ correspond à cette condition