Interrogation - 08-03-2010

(1) 1. Voici le tableau d'une régression linéaire calculée à partir de 3 points.
Justifier: $\text{cov}(X, Y) = 4$
Justifier: $\text{Var}(X) = \frac{8}{3}$
Une des deux droites données dans le tableau est la droite de régression linéaire. Laquelle ? Justifier!

					droite n° 1	droite n° 2
	x	y	x^2	$x.y$	$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$	$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{6}$
	1	3	1	3	2.67	2.33
	3	5	9	15	5.67	5.33
	5	9	25	45	8.67	8.33
$\Sigma =$	9	17	35	63		

$\overline{X} = \frac{9}{3} = 3$
$\overline{Y} = \frac{17}{3}$
$\overline{X.Y} = \frac{63}{3}$
$\overline{X^2} = \frac{35}{3}$
$\text{cov}(X, Y) = \overline{X.Y} - \overline{X}\,\overline{Y} = \frac{63}{3} - 3 \times \frac{17}{3} = 4$
$\text{Var}(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \frac{35}{3} - 3^2 = \frac{8}{3}$

La droite de régression passe par le point $\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ puisque $b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$
$\overline{X} = 9/3 = 3$
$\overline{Y} = 17/3$
On remplace x par $\overline{X}$ dans l'équation de la droite 1: $y = \frac{3 . 3}{2} - \frac{7}{6} = 17/3 = \overline{Y}$
La droite de régression est donc la droite 1!

(3) 2. Un test comporte 10 questions à choix multiples. Chaque question a 3 réponses proposées dont une seule est correcte. Un étudiant choisit au hasard la réponse à chaque question.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses données.
a) Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à toutes les questions.
b) Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à 5 questions.
c) Quelle est l'espérance mathématique de cette variable aléatoire?
d) Calculer variance et écart-type.

C'est une variable aléatoire binomiale pour laquelle $n = 10$ et $p = 1/3$

Donc, $P(X = i) = C_{10}^{i}(1/3)^{i}\,(2/3)^{10-i}$
a) $P(X = 10) = C_{10}^{10}(1/3)^{10}\,(2/3)^{0} = 0.0000169351$

b) $P(X = 5) = C_{10}^{5}(1/3)^{5}\,(2/3)^{5} = 252\,.\,32/59049 = 0.136565$

c) $\text{EX} = n\,p = 10/3$

d) $\text{Var}\,X = n\,.\,p\,.\,q = 20/9$
$\sigma_X = \sqrt{20/9} = 2\sqrt{5}\,/3$

Samir doit suivre un régime pendant une année.
Le premier jour, il ne mange pas de chocolat.
Si un jour donné n ($1 \leq n \leq 365$) Samir ne mange pas de chocolat, il y a une chance sur cinq qu'il n'en mange pas le lendemain.
Si ce même jour, Samir mange du chocolat, il y a une chance sur deux qu'il n'en mange pas le lendemain.
Pour $n \geq 1$ on désigne par F_n l'événement "Samir ne mange pas de chocolat le jour n".

a) Calculer $P(F_2 \mid F_1)$ et $P\left(F_2{}^C \mid F_1\right)$

b) Calculer la probabilité des événements:
A : Samir ne mange pas de chocolat durant les n premiers jours
B : Sami mange du chocolat seulement le dernier jour des n premiers jours.

c) Durant les 3 premiers jours, on note X le nombre de jours pendant lesquels Samir mange du chocolat.
Calculer la loi de probabilités.
Calculer l'espérance de X.