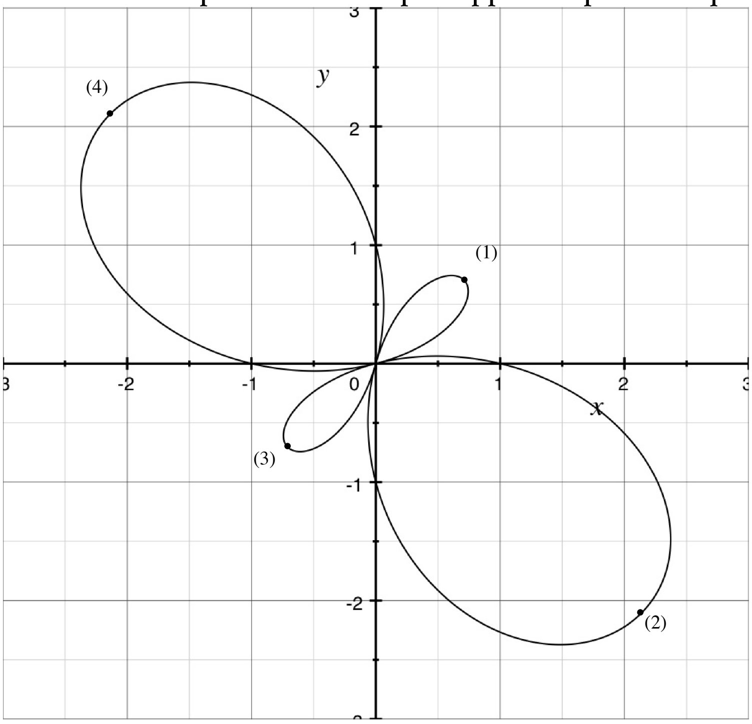
Interrogation de mathématique - 25-02-2010

(2) 1. Justifier la forme de l'équation polaire d'une hyperbole.

> voir cours...

(2) 2. Soit la courbe $r = 2\sin(2\,\omega) - 1$ dont le graphe est représenté ci-dessous.
Déterminez les points extrêmes par rapport au pôle. Indiquez-les sur le dessin.



> $(2\sin(2\,\omega) - 1)' = 4\cos 2\,\omega = 0$
> $\omega = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}$
> (1) $\omega = \frac{\pi}{4}$ $\quad r = 1$
> (2) $\omega = \frac{3\pi}{4}$ $\quad r = -3$
> (3) $\omega = \frac{5\pi}{4}$ $\quad r = 1$
> (4) $\omega = \frac{7\pi}{4}$ $\quad r = -3$

(3) 3. Soit la courbe $r = \dfrac{1}{2 - \cos\omega}$.

a) De quel type de courbe s'agit-il?

b) Donner des coordonnes polaires des foyers et des sommets.

a) $r = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}$ est l'équation d'une ellipse d'excentricité $\epsilon = \frac{1}{2}$

b) recherchons les points d'intersection avec l'axe polaire:

$\omega = 0$ nous donne $r = 1$
$S_1 : (1; 0)$
$\omega = \pi$ nous donne $r = \frac{1}{3}$
$S_2 : \left(\frac{1}{3}, \pi\right)$
la distance entre les 2 sommets est donc $2\,a = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ et $a = \frac{2}{3}$
On a alors $\epsilon = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$ ce qui donne $c = \frac{1}{3}$
et $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Un foyer est le pôle
$F_1 : (0; 0)$
L'autre foyer a donc pour coordonnées $(2\,c; 0) = \left(\frac{2}{3}; 0\right)$
Le centre se trouve au milieu de ces 2 points c-à-d a comme coord. $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$
Pour le sommet S_3, on a $r\cos\omega = c = \frac{1}{3}$ et $r\sin\omega = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ce qui donne $r = a = \frac{2}{3}$
$\left(a^2 = b^2 + c^2\right)$
$\cos\omega = \frac{c}{a} = \epsilon = \frac{1}{2}$ et donc $\omega = \frac{\pi}{3}$
$S_3 : \left(\frac{2}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$
Par symétrie, le sommet S_4 a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} : \frac{-\pi}{3}\right)$