Les coniques

- Définition

On considère
- un nombre réel $\epsilon > 0$,
- dans le plan, un point F et une droite d ne comprenant pas F.

Une conique Γ est le lieu géométrique des points P du plan dont la distance à F égale le produit de leur distance à d par le réel ϵ.

$\Gamma = \{ P \in \pi : d(P, F) = \epsilon . d(P, d) \}$ *équation focale*

remarques:
- F est le foyer de la conique
- d est la directrice de la conique (associée à F)
- ϵ est l'excentricité de la conique

Les ellipses sont des coniques dont l'excentricité est < 1
Les paraboles sont des coniques dont l'excentricité est $= 1$
Les hyperboles sont des coniques dont l'excentricité est > 1

- Axe de symétrie

- Pour toute conique Γ de foyer F et de directrice associée d, la droite m passant par F, perpendiculairement à d est un axe de symétrie de Γ.

Hypothèses :
Soit P, un point quelconque de Γ
Soit P', le symétrique du point P par rapport à la droite m
Thèse:
Il faut montrer que P' est un point de Γ
Démonstration:
- puisque les symétries orthogonales conservent les distances,
$d(P, d) = d(P', d)$ et $d(P, F) = d(P', F)$
- puisque P est un point de la conique, on a
$d(P, F) = \epsilon . d(P, d)$
- on a alors
$d(P', d) = \epsilon . d(P', d)$
et donc P' est aussi un point de Γ

remarque :
*- la droite m, menée par le foyer F et perpendiculaire à la directrice d est l'**axe focal** de la conique.*
*- les points d'intersection de la conique et de son axe focal sont les **sommets** de la conique.*

- Propriétés des sommets

- Toute conique de foyer F, de directrice associée d, d'excentricité ϵ et d'axe focal m possède un et un seul sommet S situé sur m et compris entre F et d.

- soit la conique de foyer F, de directrice d et d'excentricité ϵ ;
- soit l'axe focal m;
- soit le point D, intersection de m et de d

supposons que la conique et l'axe focal aient un point commun X situé entre D et F.

$$x \in \Gamma$$
$$d(X, F) = \epsilon\, d(X, d)$$
$$d(X, F) = \epsilon\, d(X, D)$$
$$\overline{\mathrm{XF}} = \epsilon\,.\,\overline{\mathrm{XD}}$$

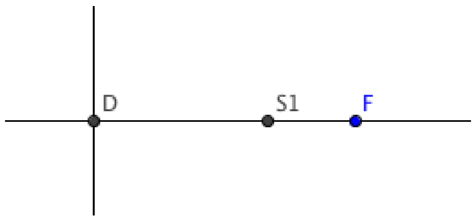
$$\overrightarrow{\mathrm{XF}} = -\epsilon\,.\,\overrightarrow{\mathrm{XD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{XD}} + \overrightarrow{\mathrm{DF}} = -\epsilon\,.\,\overrightarrow{\mathrm{XD}}$$
$$(1+\epsilon)\,.\,\overrightarrow{\mathrm{XD}} = \overrightarrow{\mathrm{FD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DX}} = \frac{1}{1+\epsilon}\,\overrightarrow{\mathrm{DF}}$$

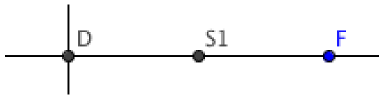
cette équation n'admet qu'une seule solution, il n'existe donc qu'un seul point X (noté S_1) commun à la conique et à l'axe focal situé entre D et F. C'est un sommet de la conique.
En particulier,

$\overline{\mathrm{SF}} < \overline{\mathrm{SD}}$	si $0 < \epsilon < 1$
$\overline{\mathrm{SF}} = \overline{\mathrm{SD}}$	si $\epsilon = 1$
$\overline{\mathrm{SF}} > \overline{\mathrm{SD}}$	si $\epsilon > 1$

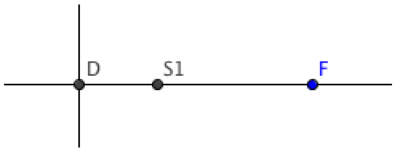
ellipse ($0 < \epsilon < 1$): $\epsilon = \frac{1}{2}$



parabole: $\epsilon = 1$



hyperbole (ϵ >1):: $\epsilon = 2$



- Toute conique de foyer F, de directrice associée d, d'excentricité ϵ et d'axe focal m
  possède un et un seul sommet S situé sur m et non compris entre F et d
  SSI $\epsilon \neq 1$.

- soit la conique de foyer F, de directrice d et d'excentricité ϵ ;
- soit l'axe focal m;
- soit le point D, intersection de m et de d

supposons que la conique et l'axe focal aient un point commun X non situé entre D et F.

$$d(X, F) = \epsilon . d(X, D)$$

$$\overline{XF} = \epsilon . \overline{XD}$$

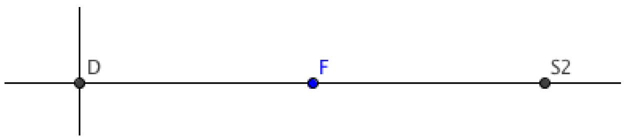
$$\overrightarrow{XF} = \epsilon . \overrightarrow{XD}$$
$$\overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DF} = \epsilon . \overrightarrow{XD}$$
$$(1 - \epsilon) . \overrightarrow{XD} = \overrightarrow{FD}$$

$$\overrightarrow{DF} = (1 - \epsilon) \overrightarrow{DX}$$

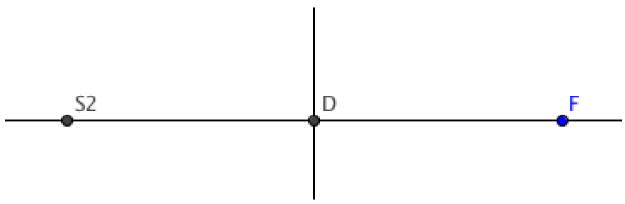
dans cette équation, il faut que $\epsilon \neq 1$. En effet, si $\epsilon = 1$, alors $\overrightarrow{DF} = \vec{0}$ et D = F, ce qui est contraire à la définition de foyer et de directrice associée.

si $\epsilon \neq 1$, alors $\overrightarrow{DX} = \frac{1}{1-\epsilon} \overrightarrow{FD}$
cette équation n'admet qu'une seule solution, il n'existe donc qu'un seul point X (noté S_2) commun à la conique et à l'axe focal et non situé entre D et F. C'est un sommet de la conique.

ellipse ($0 < \epsilon < 1$): $\epsilon = \frac{1}{2}$



hyperbole ($\epsilon > 1$):: $\epsilon = 2$



- L'axe focal d'une conique de foyer F et de directrice d coupe cette conique
  - en un seul point S situé entre F et d, à égale distance entre F et d **SSI** la conique est une parabole
  - en deux points S_1 et S_2 SSI la conique est une ellipse ($0 < \epsilon < 1$) ou une hyperbole ($\epsilon > 1$). Dans les deux cas, S_1 est compris entre F et d et S_2 ne l'est pas.

- Toute conique admettant 2 sommets sur l'axe focal a un foyer
  - compris entre les sommets si $0 < \epsilon < 1$
  - non compris entre les sommets si $\epsilon > 1$

- Position du milieu des sommets
  Pour toute conique admettant 2 sommets S_1 et S_2 sur l'axe focal et de foyer F,
  si O est le milieu de $[S_1, S_2]$
  alors
  $\overline{OF} = \epsilon\,\overline{OS_1}$
  et
  $\overline{OS_1} = \epsilon\,\overline{OD}$

$\overrightarrow{S_1F} = -\epsilon\,.\,\overrightarrow{S_1D}$ et $\overrightarrow{S_2F} = \epsilon\,.\,\overrightarrow{S_2D}$

$\overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OF} = -\epsilon\,.(\overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OD})$ (1)
et
$\overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OF} = \epsilon\,.(\overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OD})$ (2)

additionnons membre à membre

$\overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OF} = \epsilon\,(-\overrightarrow{S_1O} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OD})$

$2\,\overrightarrow{OF} = \epsilon\,(2\,\overrightarrow{OS_1})$

$\overrightarrow{OF} = \epsilon\,\overrightarrow{OS_1}$
et donc
$\overline{OF} = \epsilon\,\overline{OS_1}$

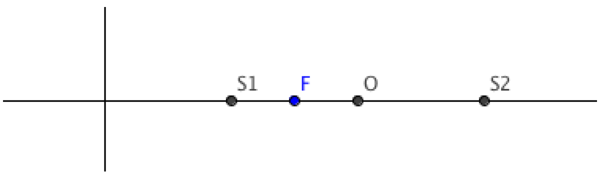
reprenons les égalités (1) et (2) et soustrayons membre à membre

$\overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{S_2O} - \overrightarrow{OF} = \epsilon\,(-\overrightarrow{S_1O} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{S_2O} - \overrightarrow{OD})$

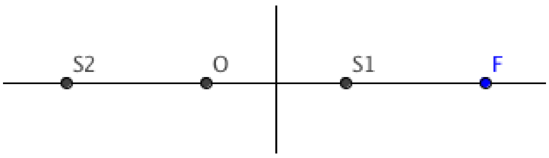
$2\,\overrightarrow{S_1O} = \epsilon\,(-2\,\overrightarrow{OD})$

$\overrightarrow{OS_1} = \epsilon\,\overrightarrow{OD}$
et donc
$\overline{OS_1} = \epsilon\,\overline{OD}$

ellipse ($0 < \epsilon < 1$): $\epsilon = \frac{1}{2}$

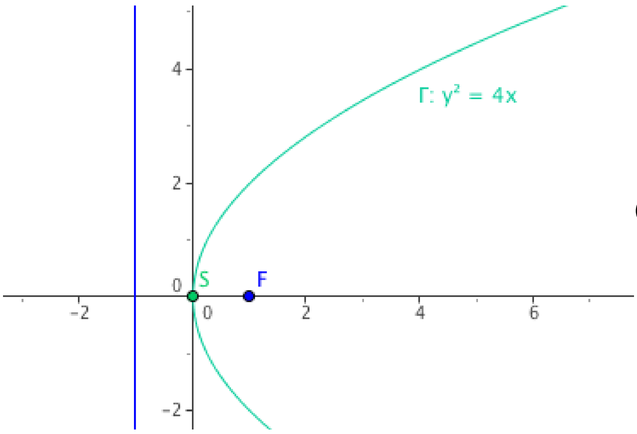


hyperbole ($\epsilon > 1$): $\epsilon = 2$



Equation réduite d'une parabole

Dans un repère orthonormé du plan;
soit le paramètre p de la parabole, distance du foyer F à la directrice d,
on place le sommet de la parabole à l'origine
on a alors le foyer $F : \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la directrice $d \equiv x = \frac{-p}{2}$
le point D a pour coordonnées $\left(\frac{-p}{2}, 0\right)$



(p = 2)

$\Gamma = \{ P \in \pi : d(P, F) = \epsilon . d(P, d) \}$
$P : (x, y)$
$\Gamma = \{ \mathrm{P} \in \pi : \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \epsilon \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \}$

$\Gamma = \{ \mathrm{P} \in \pi : y^2 = 2\, p\, x \}$
équation réduite de la parabole de paramètre p

---

exemple : Donner une équation focale et réduite de la parabole de foyer F (5, 0) et de directrice d : x = -5.

$(x - 5)^2 + y^2 = (x + 5)^2$

Après simplification, on obtient

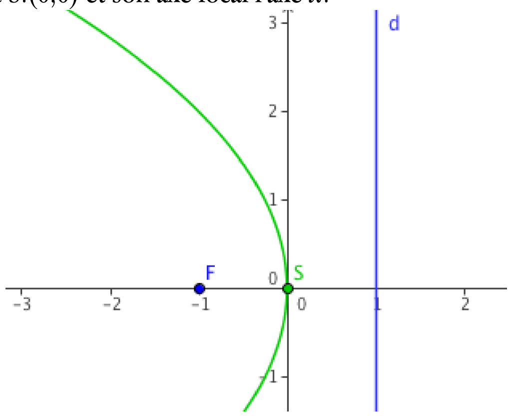
$20\, x = y^2$

- Autres équations réduites de la parabole

1. la parabole Γ de paramètre p >0, de foyer F $\left(\frac{-p}{2}, 0\right)$ et de directrice $d \equiv x = \frac{p}{2}$

   a pour équation $y^2 = -2\,p\,x$.

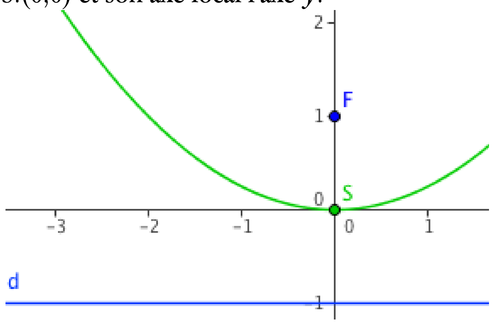
Son sommet est le point S:(0,0) et son axe focal l'axe x.



2. la parabole Γ de paramètre $p > 0$, de foyer F $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ et de directrice $d \equiv y = \frac{-p}{2}$

   a pour équation $x^2 = 2\,p\,y$ ou $y = \frac{x^2}{2\,p}$.

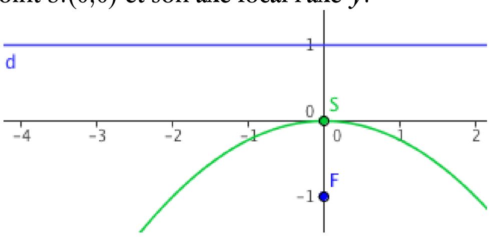
Son sommet est le point S:(0,0) et son axe focal l'axe y.



3. la parabole Γ de paramètre $p > 0$, de foyer F $\left(0, \frac{-p}{2}\right)$ et de directrice $d \equiv y = \frac{p}{2}$

   a pour équation $x^2 = -2\,p\,y$ ou $y = \frac{-x^2}{2\,p}$.

Son sommet est le point S:(0,0) et son axe focal l'axe y.



Pour les paraboles $y^2 = 5\,x$ et $x^2 = 4\,y$, déterminer le sommet, l'axe focal, le foyer et la directrice + dessin

Donner une équation réduite des paraboles de sommet (0,0) et
a) de foyer (0,-1)
b) de directrice $y + 5 = 0$
c) d'axe focal $x = 0$ et passant par P:(3,-4)

■ Equations réduites d'une conique centrée

On pose $\overline{OS_1} = a$ et $\overline{OF} = c$. On choisit un repère orthonormé tel que l'origine est le point O, milieu de $[S_1 S_2]$, l'axe des abscisses est l'axe focal m et l'axe des ordonnées est la perpendiculaire à m comprenant O.

On a alors
O : (0, 0)
$S_1 : (a, 0)$
$F : (c, 0)$
comme $\overline{OF} = \epsilon\, \overline{OS_1}$, on a $\epsilon = \frac{c}{a}$

et comme $\overrightarrow{OS_1} = \epsilon\, \overrightarrow{OD}$, on a $\overline{OD} = \frac{a^2}{c}$

et donc $d \equiv x = \frac{a^2}{c}$.

Recherchons maintenant l'équation réduite:

$$\Gamma = \{P \in \pi \mid d(P, F) = \epsilon\,.\,d(P, d)\}$$
$$\Gamma = \left\{P(x, y) \mid (x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2\right\}$$
$$\Gamma = \left\{P(x, y) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\right\}$$
$$\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Pour l'ellipse,
$0 < \epsilon < 1 \iff 0 < \frac{c}{a} < 1$
$\iff a^2 > c^2$
$\iff a^2 - c^2 > 0$
aussi, on pose $b^2 = a^2 - c^2$ avec $b > 0$
$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

L'équation réduite peut alors s'écrire
$$\boxed{\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$
ou encore
$\Gamma \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Pour l'hyperbole
$\epsilon > 1 \iff \frac{c}{a} > 1$
$\iff 0 < a < c$
$\iff c^2 - a^2 > 0$
aussi on pose $b^2 = c^2 - a^2$ avec $b > 0$
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

L'équation réduite peut alors s'écrire
$$\boxed{\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$
ou encore
$\Gamma \equiv b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$