Nom: Classe : 6 $A_1 - A_2$

F. Mélotte

Institut Sainte-Ursule 11 Juin 2009

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUE (MATH 6H)

Instructions :
- Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre, **tracez une ligne entre chaque question**.
- Tout résultat doit être justifié clairement et complètement.
- La calculatrice **est autorisée**.

■ Analyse

(2) 1. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arccos}(2\,x)\, dx$

■ Géométrie

(1) 2. Donner et justifier les équations paramétriques d'une ellipse ($a = 3$ et $b = 1$).

(2) 3. Soit la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = \sin(2\,t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

a) Cette courbe possède-t-elle une symétrie? Justifier.
b) Cette courbe possède-t-elle une période? Justifier.
c) Calculer les coordonnées des points de la courbe pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{4}$ et $t = \pi$.
d) Utiliser la symétrie et les points calculés pour esquisser le graphe.

(1) 4. On considère une courbe d'équation polaire $r = f(\omega)$.
a) Sachant que pout tout $\omega \in \mathbb{R}$: $f(\omega + \pi) = f(\omega)$, quelle symétrie possède alors une telle courbe?
b) Expliquer comment déterminer les points les plus éloignés verticalement par rapport à la droite contenant l'axe polaire.

(3) 5. On considère la courbe d'équation $r = \frac{3}{1+2\cos\omega}$.
a) Quel est le type de cette courbe ?
b) Déterminer les coordonnées polaires des sommets et du centre.
c) Dessiner cette courbe.

■ Complexes

(1) 6. Justifier la formule de Moivre.

(2) 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ et représenter les solutions dans le plan gaussien.

a) $z^2 + 3\,z + 3 + i = 0$

b) $z^4 = -1 - i$

BON TRAVAIL !

Solutions

remarque importante: les solutions qui suivent ne sont que des éléments de réponse; lors du bilan, tous les résultats doivent être justifiés en détail!

- Analyse

(2) 1. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arccos}(2\,x)\,dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arccos}(2\,x)\,dx = \left[\, x \operatorname{Arccos}(2\,x) - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\,x^2}\,\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

- Géométrie

(1) 2. Donner et justifier les équations paramétriques d'une ellipse ($a = 3$ et $b = 1$).

Equation cartésienne de l'ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

En considérant $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on obtient

$\frac{x}{a} = \cos t$ et $\frac{y}{b} = \sin t$ ce qui donne les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases}$$

et donc, pour les valeurs données,

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

(2) 3. Soit la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = \sin(2\,t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

a) Cette courbe possède-t-elle une symétrie? Justifier.
b) Cette courbe possède-t-elle une période? Justifier.
c) Calculer les coordonnées des points de la courbe pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{4}$ et $t = \pi$.
d) Utiliser la symétrie et les points calculés pour esquisser le graphe.

a) oui, $x(t)$ est une fonction impaire et $y(t)$ est paire. La courbe possède dont une symétrie orthogonale d'axe Y.
b) oui, les deux fonctions sont périodiques de période $2\,\pi$.

c) $t = 0$ $\quad (0, 1)$

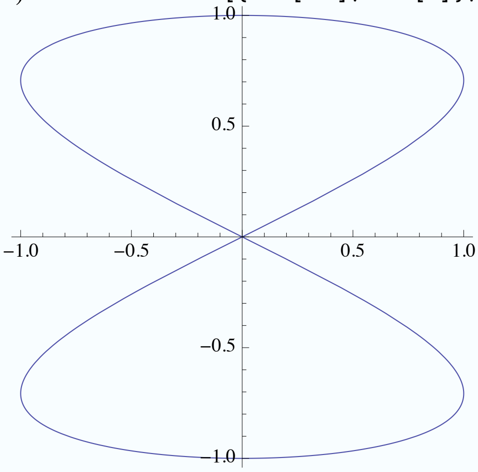
$t = \pi/4 \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$t = \frac{\pi}{2}$ $\quad (0, 0)$

$t = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$t = \pi$ $\quad (0, -1)$

d) `ParametricPlot[{Sin[2 t], Cos[t]}, {t, 0, 2 π}]`

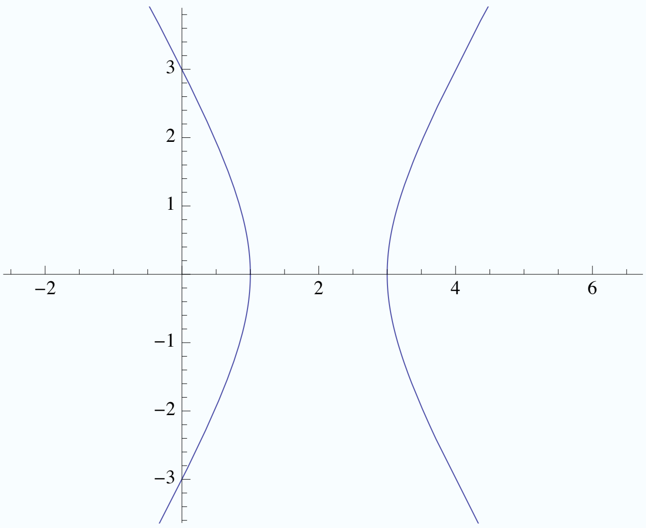


(1) 4. On considère une courbe d'équation polaire $r = f(\omega)$.
a) Sachant que pout tout $\omega \in \mathbb{R}$: $f(\omega + \pi) = f(\omega)$, quelle symétrie possède alors une telle courbe?
b) Expliquer comment déterminer les points les plus éloignés verticalement par rapport à la droite contenant l'axe polaire.

a) une symétrie centrale dont le centre est le pôle. (*ajouter un dessin*)
b) On considère $f(\omega)$. $\sin \omega$ et on recherche les extrémums de cette expression en déterminant les valeurs qui annulent la dérivée.

(3) 5. On considère la courbe d'équation $r = \frac{3}{1+2\cos\omega}$.
a) Quel est le type de cette courbe ?
b) Déterminer les coordonnées polaires des sommets et du centre.
c) Dessiner cette courbe.

a) c'est une hyperbole d'excentricité $\epsilon = 2$
b) pour calculer les sommets, on pose $\omega = 0$ et $\omega = \pi$
$\omega = 0$ donne $r = 1$
$\omega = \pi$ donne $r = -3$
le centre est le milieu des sommets donc $r = 2$ et $\omega = 0$
c)
`PolarPlot[3 / (1 - 2 Cos[ω]), {ω, 0, 2 π}]`



- Complexes

(1) 6. Justifier la formule de Moivre.

voir cours...

7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ et représenter les solutions dans le plan gaussien.

a) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$

b) $z^4 = -1 - i$

a) $\Delta = 9 - 12 - 4i = -3 - 4i$
recherchons les racines carrées de $u = -3 - 4i$
$|u| = \sqrt{9+16} = 5$

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(-3+5)} - \sqrt{\frac{1}{2}(-3-5)}\, i = 1 - 2i$$

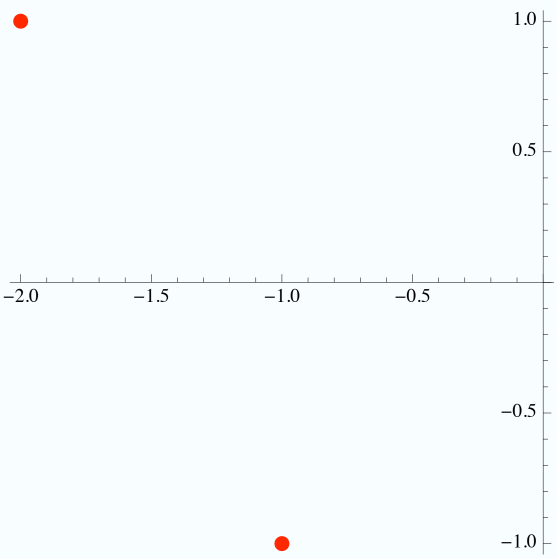
$$u_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-3+5)} + \sqrt{\frac{1}{2}(-3-5)}\, i = -1 + 2i$$

Les solutions de l'équation sont donc

$z_1 = \frac{-3+1-2i}{2} = -1 - i$

et

$z_2 = \frac{-3-1+2i}{2} = -2 + i$



b) $-1 - i = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{5\pi}{4}$

$z_0 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\ \frac{5\pi}{16}$

$z_1 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\ \frac{13\pi}{16}$

$$z_2 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\ \frac{21\pi}{16}$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\ \frac{29\pi}{16}$$