Opérations sur les ensembles

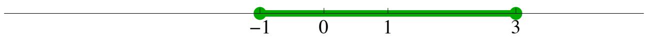
1. Intervalles de réels

- Intervalles fermés

  $[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \,\}$

exemple 1: $[-1\,,\,3] = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, -1 \leq x \leq 3\}$

On peut représenter cet intervalle sur la droite réelle comme suit:



- Intervalles ouverts

  $]\,a, b[\, = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

exemple 2: $[-2\,,5] = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, -2 < x < 5\}$

On peut représenter cet intervalle sur la droite réelle comme suit:

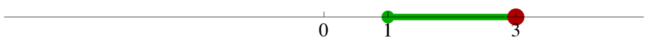
- Intervalles semi-ouverts (ou semi-fermés)

  $]\,a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

  $[a, b[\, = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

exemple 3: $[1\,,3[\, = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, 1 \leq x < 3\}$

On peut représenter cet intervalle sur la droite réelle comme suit:



- Intervalles non bornés

  $[a, \longrightarrow\, = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

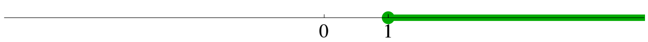
  $]\,a, \longrightarrow\, = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

  $\longleftarrow, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

  $\longleftarrow, b[\, = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

exemple 4: $[1\,, \longrightarrow\, = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, 1 \leq x\}$

On peut représenter cet intervalle sur la droite réelle comme suit:



remarque: d'autres notations sont parfois utilisées pour les intervalles non bornés

$$[a, \longrightarrow\, = [a\,, +\infty[$$
$$]\,a, \longrightarrow\, =]\,a, +\infty[$$
$$\longleftarrow, a\,] =]-\infty\,, a]$$
$$\longleftarrow, a[\, =]-\infty, a[$$

2. Opérations sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Soient A, B $\subset \mathbb{R}$

Union

L'union des deux ensembles A et B est l'ensemble des réels qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux à la fois).

$A \bigcup B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \bigvee x \in B\}$

le symbole $\vee$ signifie "ou (non exclusif)"

---

exemple 5: $A = \{-1, \sqrt{3}, 2, \pi\}$ et $B = \{1, \frac{\pi}{2}, 2, \pi\}$

$A \bigcup B = \{-1, 1, \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}, 2, \pi\}$

---

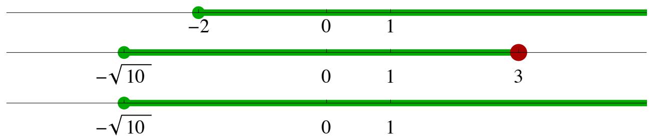
exemple 6: $A = [-2, \longrightarrow$ et $B = [-\sqrt{10}, 3[$

$A \bigcup B = [-\sqrt{10}, \longrightarrow$

A

B

$A \bigcup B$



- Intersection

L'intersection des deux ensembles A et B est l'ensemble des réels qui appartiennent à A et à B; c'est donc l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.

$A \bigcap B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \bigwedge x \in B\}$

le symbole $\wedge$ signifie "et"

si $A \bigcap B = \emptyset$, alors on dit que les ensembles A et B sont disjoints

---

exemple 7: $A = \{-1, \sqrt{3}, 2, \pi\}$ et $B = \{1, \frac{\pi}{2}, 2, \pi\}$

$A \bigcap B = \{1, 2, \pi\}$

---

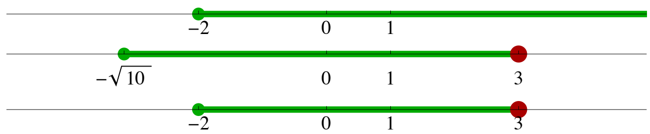
exemple 8: $A = [-2, \longrightarrow$ et $B = [-\sqrt{10}, 3[$

$A \bigcap B = [-\sqrt{10}, \longrightarrow$

A

B

$A \bigcap B$



- Différence

La différence A \ B des deux ensembles A et B est l'ensemble des réels appartenant à A et n'appartenant pas à B.

$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \bigwedge x \notin B\}$

---

exemple 9: $A = \{-1, \sqrt{3}, 2, \pi\}$ et $B = \{1, \frac{\pi}{2}, 2, \pi\}$

$A \setminus B = \{-1, \sqrt{3}\}$

---

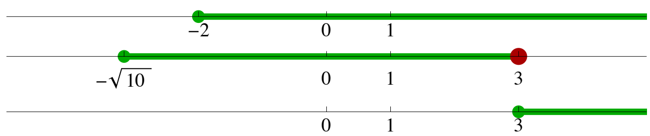
exemple 10: $A = [-2, \longrightarrow$ et $B = [-\sqrt{10}, 3[$

$A \setminus B = [-\sqrt{10}, \longrightarrow$

A

B

$A \setminus B$



A \ B n'est généralement pas égal à B \ A

Illustrez cette remarque par un exemple. Pouvez-vous trouver un exemple où $A \setminus B = B \setminus A$.

- Exercices:

$E_1 = [-\frac{3}{2}, 4[$

$E_2 = \longleftarrow, 1[$

$E_3 =]2, 7[$

$E_4 = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Déterminer les ensembles suivants

a) $E_1 \cap E_2$

b) $E_1 \cup E_3$

c) $E_4 \setminus E_3$

d) $(E_1 \cap E_3) \cup E_2$

e) $(E_2 \cup E_3) \setminus E_1$

Solutions

a) $E_1 \cap E_2 = [-\frac{3}{2}, 1[$

b) $E_1 \cup E_3 = [-\frac{3}{2}, 7[$

c) $E_4 \setminus E_3 = \longleftarrow, 2] \cup [7, \longrightarrow$

d) $(E_1 \cap E_3) \cup E_2 = \longleftarrow, 1[\cup]2, 4[$

e) $(E_2 \cup E_3) \setminus E_1 = \longleftarrow, -\frac{3}{2}[\cup [4, 7[$