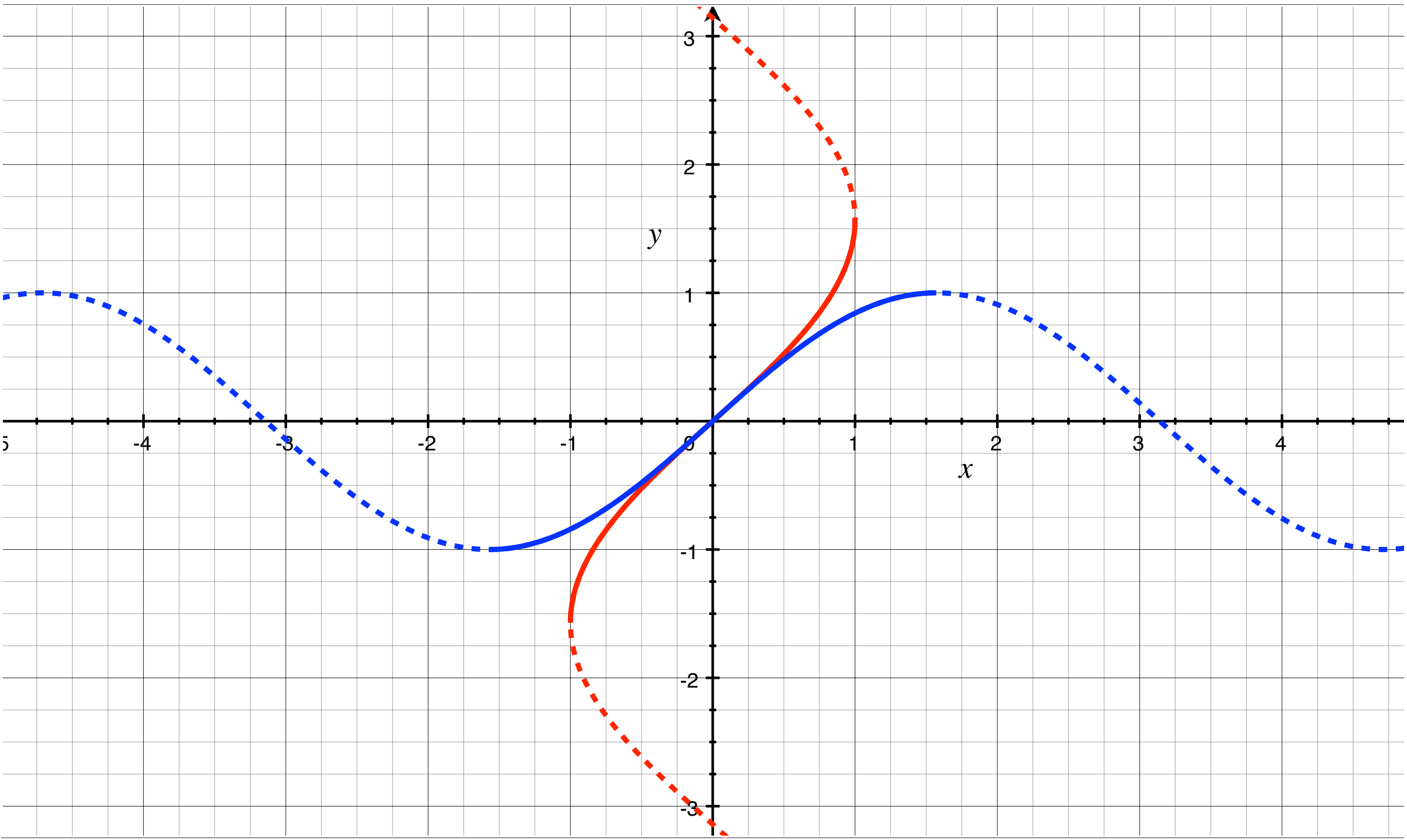
Fonctions cyclométriques

- Fonction Arcsinus

La fonction $\sin x$ n'est pas injective.

Prenons $x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. On a alors $f(x_1) = \frac{1}{2} = f(x_2)$.

La réciproque de $\sin x$ n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreind la fonction sinus à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Définition

$\forall\, x \in [-1, 1]\ :\ \text{Arcsin}\, x = y \iff \sin y\ =\ x\ \text{ et } y\ \in\ \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- Propriétés

dom Arcsin $= [-1, 1]$

im Arcsin $= \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\forall\, x\ \in\ [-1, 1]:\ \sin(\text{Arcsin}\, x) = x$

! La propriété $\ \forall\, x\ \in\ \mathbb{R}:\ \text{Arcsin}(\sin x) = x\ $ est fausse !

En effet, $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \text{Arcsin}\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$

- Dérivée

$$(\text{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}\, x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- Croissance

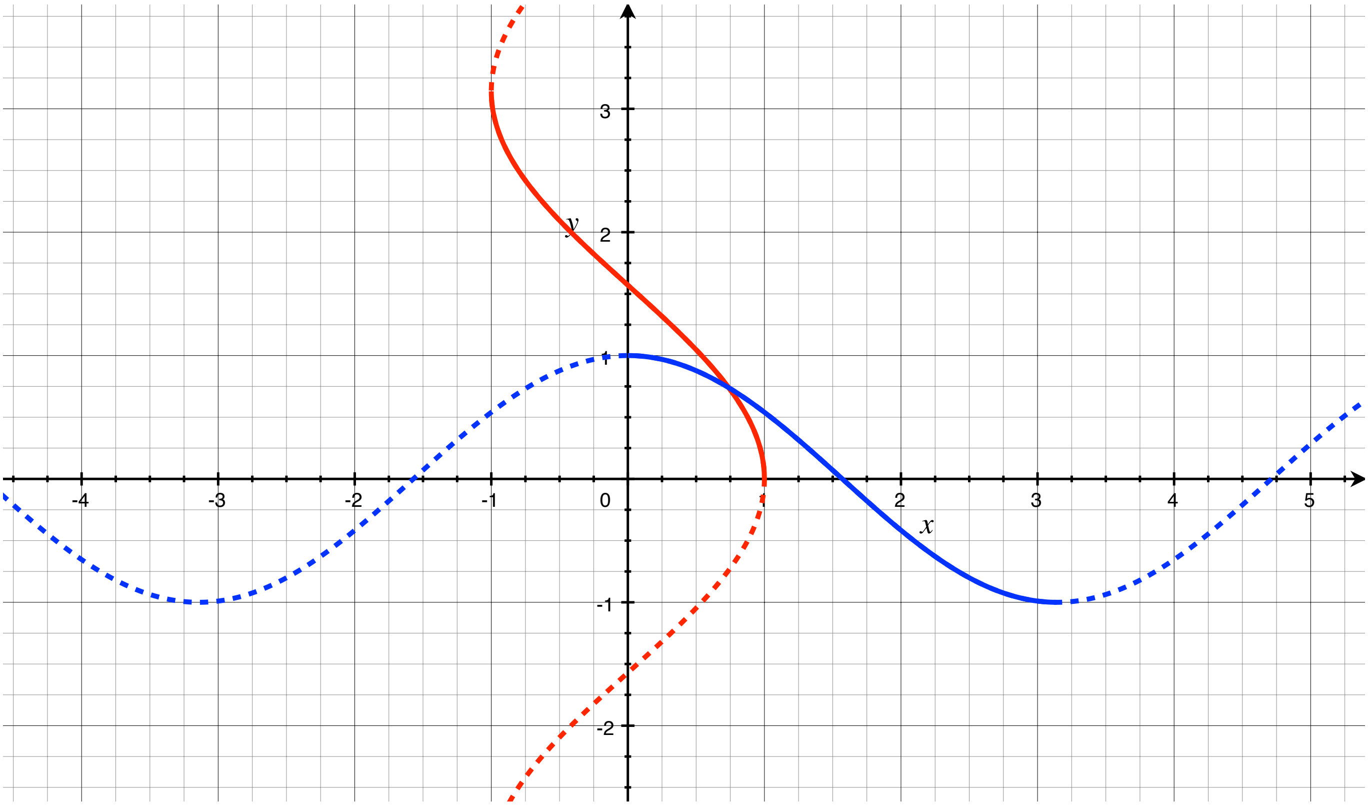
La fonction $\text{Arcsin}\, x$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$

Fonction Arccosinus

La fonction $\cos x$ n'est pas injective.

Prenons $x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = -\frac{\pi}{6}$. On a alors $f(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f(x_2)$.

La réciproque de $\cos x$ n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreind la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$.

Définition

$\forall\, x \in [-1, 1] \;:\; \text{Arccos}\, x = y \Longleftrightarrow \cos y = x \text{ et } y \in [0, \pi]$

Propriétés

dom Arccos $= [-1, 1]$

im Arccos $= [0, \pi]$

$\forall\, x \in [-1, 1] : \cos(\text{Arccos}\, x) = x$

! La propriété $\forall\, x \in \mathbb{R} : \text{Arccos}(\cos x) = x$ est fausse !

En effet, $\text{Arccos}\left(\cos \frac{-\pi}{4}\right) = \text{Arccos}\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{-\pi}{4}$

Dérivée

$$(\text{Arccos}\, x)' = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}\, x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\text{Arccos}\, x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Croissance

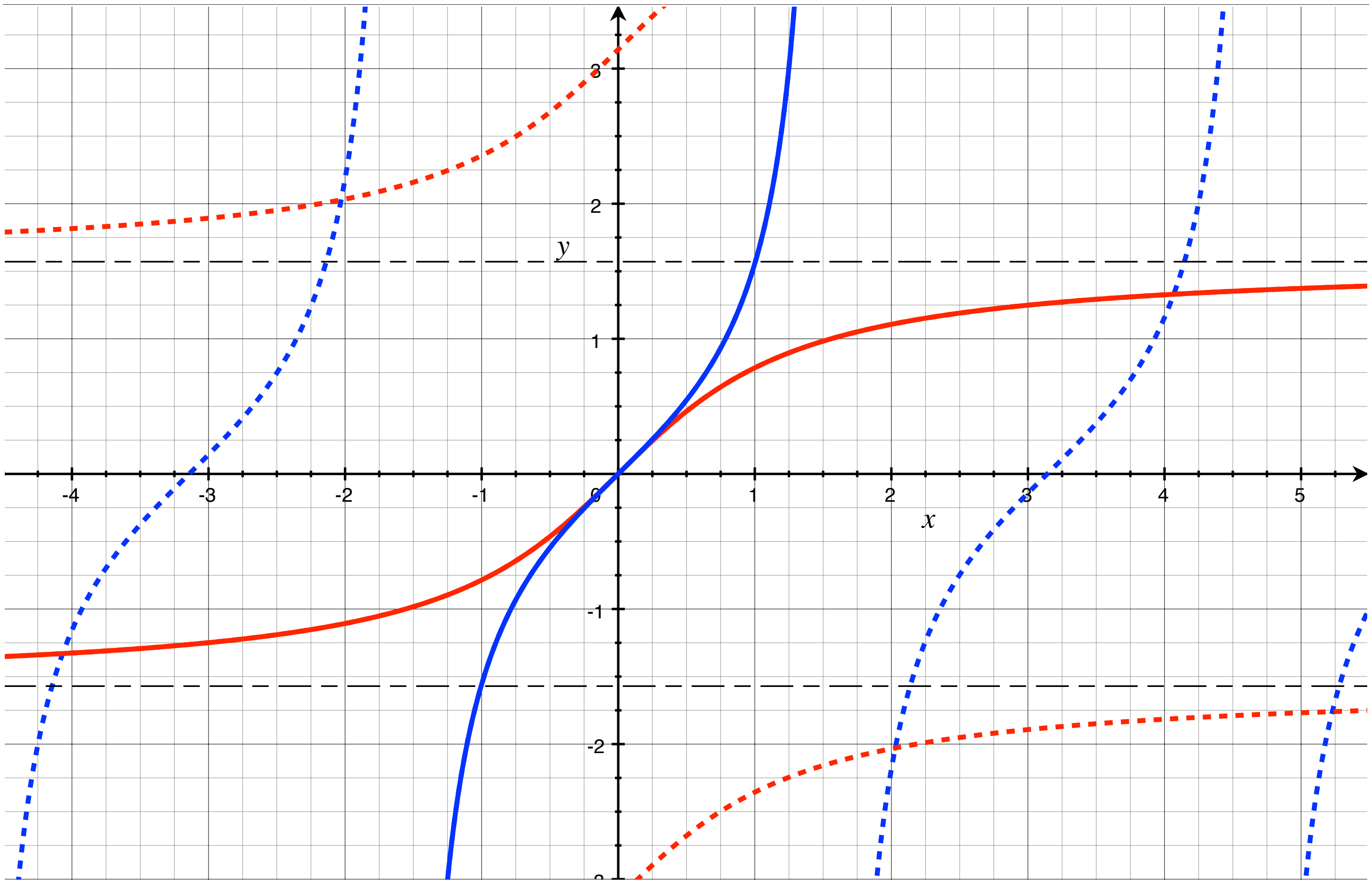
La fonction $\text{Arccos}\, x$ est strictement décroissante sur $[-1, 1]$

■ Fonction Arctangente

La fonction tg x n'est pas injective.

Prenons $x_1 = 0$ et $x_2 = \pi$. On a alors $f(x_1) = 0 = f(x_2)$.

La réciproque de cos x n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreind la fonction tangente à l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

■ Définition

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ \text{Arctg}\, x = y \Longleftrightarrow \text{tg}\, y = x$ et $y \in\,]-\pi/2\,, \pi/2[$

■ Propriétés

dom Arctg $= \mathbb{R}$

im Arctg $=]-\pi/2\,, \pi/2[$

$\forall\, x \in \mathbb{R}:\ \text{tg}(\text{Arctg}\, x) = x$

! La propriété $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right\}:\ \text{Arctg}(\text{tg}\, x) = x$ est fausse !

En effet, $\text{Arctg}(\text{tg}\,\pi) = \text{Arctg}0 = 0 \neq \pi$

■ Dérivée

$$(\text{Arctg}\, x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\text{Arctg}\, x)}} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\text{Arctg}\, x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

■ Croissance

La fonction Arctg x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.