

Réciproque d'une fonction

■ Introduction

Résoudre les équations suivantes:

a)

$$2x + 1 = 2$$

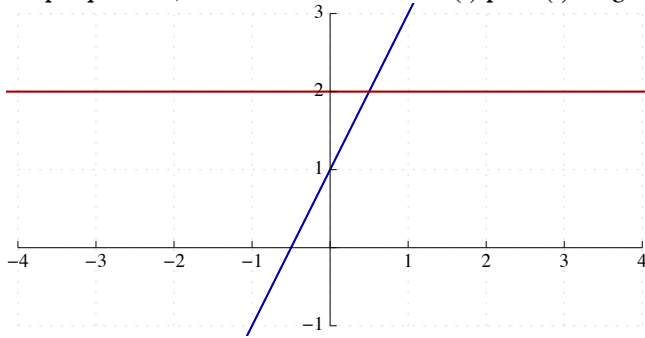
\Leftrightarrow

$$x = \frac{1}{2}$$

En considérant la fonction $f(x) = 2x + 1$, on peut regarder l'énoncé sous la forme $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

et on obtient comme solution $x = \frac{1}{2}$.

Graphiquement, cela revient à chercher le(s) point(s) du graphe de f qui ont comme abscisse 2.



b)

$$x^2 = 4$$

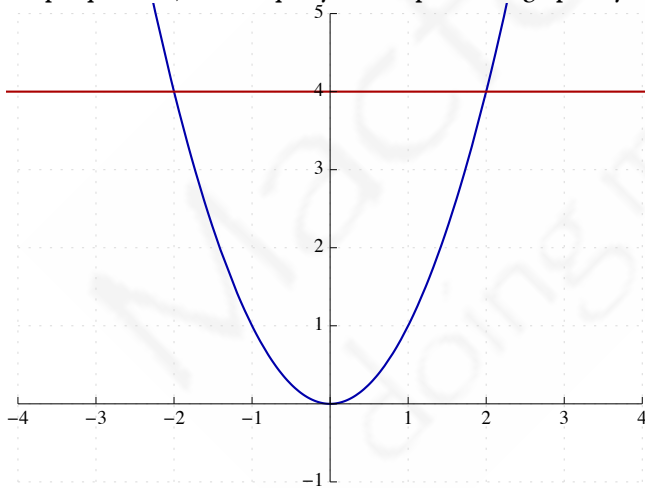
\Leftrightarrow

$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

De la même manière, en considérant $f(x) = x^2$, on a $f(x) = f(2)$ ou encore $f(x) = f(-2)$.

On remarque que l'implication $f(x) = f(2) \Rightarrow x = 2$ est fautive!

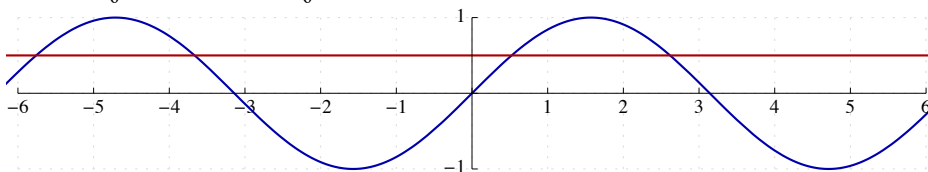
Graphiquement, on voit qu'il y a deux points du graphe ayant comme abscisse 4.



c)

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



L'implication $\sin x = \sin a \Rightarrow x = a$ est donc bien sûr fautive!!

■ Définition

La relation réciproque d'une fonction f est la relation qui à un réel x fait correspondre y tel que $f(y) = x$

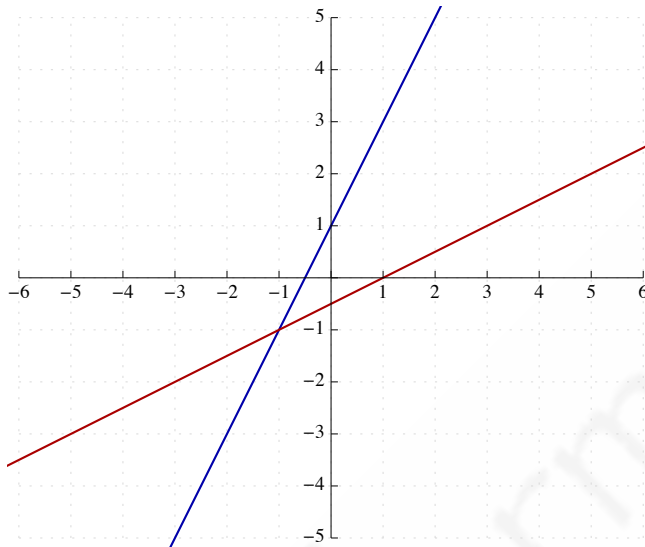
Pour une fonction définie $y = f(x)$, on voit que la définition de la réciproque, $f(y) = x$, est obtenue en permutant x et y .

exemple: $f(x) = 2x + 1$

x	y
-1	-1
0	1
$\frac{1}{2}$	2
1	3
2	5

relation réciproque

x	y
-1	-1
1	0
2	$\frac{1}{2}$
3	1
5	2



On remarque qu'il existe une symétrie entre les deux graphes et que la relation réciproque de $2x + 1$ est une fonction.

Comment la déterminer? En permutant x et y .

$$y = 2x + 1$$

on permute x et y

$$x = 2y + 1$$

on essaie d'isoler y

$$y = (x - 1)/2$$

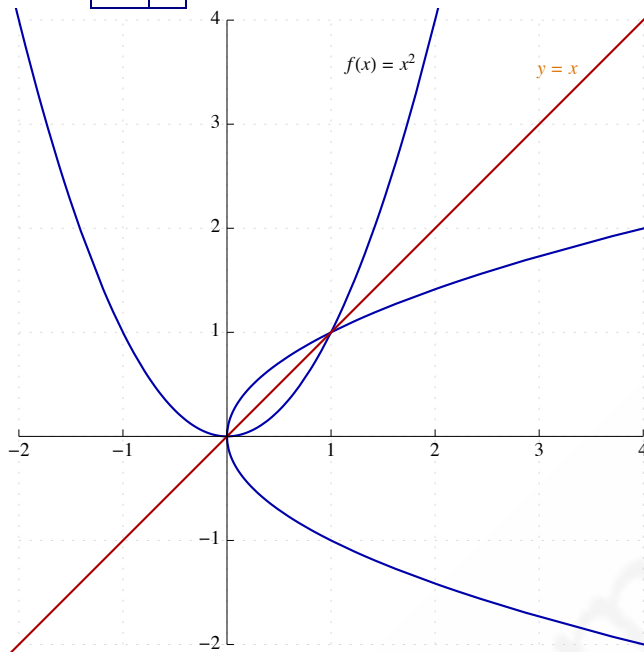
La relation réciproque de la fonction $y = 2x + 1$ est donc la fonction $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

exemple: $f(x) = x^2$

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

relation réciproque

x	y
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2



La réciproque de x^2 n'est pas une fonction. En effet, à $x = 4$, elle fait correspondre 2 réels: 2 et -2.

Déterminons une expression algébrique de la réciproque

$$y = x^2$$

on permute x et y

$$x = y^2$$

$$y^2 = x$$

$$y = \pm \sqrt{x}$$

Déterminer la relation réciproque de ces fonctions. Cette relation est-elle une fonction? Justifier.

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$$

$$f(x) = 4 - x^2$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad ! \text{ domaine de définition}$$

■ Propriété

Le graphe cartésien de la relation réciproque d'une fonction f est l'image du graphe de f par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

A quelle condition la réciproque d'une fonction est-elle une fonction...?

■ Définition

Une fonction f est injective (est une injection) si des x réels différents ont des images différentes.

f est une injection SSI $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

4 | réciproque d'une fonction.nb

En utilisant la contraposée de la définition, on peut réécrire

f est une injection SSI $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective il faut montrer que

$\exists x_1, x_2 \in \text{dom } f : x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)$

$f(x) = x^2$ n'est pas injective. En effet, prenons $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$.

Nous avons alors $f(x_1) = 4 = f(x_2)$, ce qui montre bien que x^2 n'est pas injective.

$f(x) = 2x + 1$ est injective.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$

De la même manière, montrer que $f(x) = \cos x$ n'est pas injective.

■ Propriété

La réciproque d'une fonction f est une fonction SSI f est une fonction injective.

remarque: Si la relation réciproque d'une fonction f est une fonction, elle est notée f^{-1} .

Notation à ne pas confondre avec $\frac{1}{f}$!

■ Propriétés

Si f est une fonction injective et f^{-1} sa fonction réciproque,

a) $\text{dom } f = \text{im } f^{-1}$

b) $\text{im } f = \text{dom } f^{-1}$

c) $\forall x \in \text{dom } f : (f^{-1} \circ f)(x) = x$

d) $\forall x \in \text{dom } f^{-1} : (f \circ f^{-1})(x) = x$

■ Dérivée d'une fonction réciproque

Pour rappel, $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$

exemple: $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x$

Soit f , une fonction injective et f^{-1} sa réciproque.

Nous avons $\forall x \in \text{dom } f^{-1} : (f \circ f^{-1})(x) = x$

et en dérivant membre à membre,

$(f \circ f^{-1})'(x) = x'$

$(f' \circ f^{-1})(x) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$

et donc

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$$

Exercices (solutions disponibles sur demande)

1. Soit la fonction $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$.

- Dessine le graphe de f
- Cette fonction est-elle injective ?
- Si non, détermine la plus grande partie de \mathbb{R} sur laquelle la restriction de f est injective.
- Si oui, détermine une expression analytique de la réciproque.

2. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{3-2x} + 1$.

- Dessine le graphe de f .
- Montre que cette fonction est injective.
- Détermine une expression analytique de f^{-1} .
- Dessine le graphe de f^{-1} .
- Détermine $\text{dom } f$, $\text{im } f$, $\text{dom } f^{-1}$, $\text{im } f^{-1}$.

3. Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4x$.

- Dessine le graphe de f .
- Cette fonction est-elle injective ?
- Détermine une partie A de \mathbb{R} , la plus grande possible, sur laquelle une restriction g de f est injective.
- Détermine une expression analytique de la réciproque g^{-1} de g .
- Dessine le graphe de g et g^{-1} .
- Détermine $\text{dom } g$, $\text{im } g$, $\text{dom } g^{-1}$, $\text{im } g^{-1}$.
- Les propriétés suivantes sont-elles vérifiées ?
 - $\forall x \in \text{dom } f : (g^{-1} \circ f)(x) = x$
 - $\forall x \in \text{dom } g^{-1} : (f \circ g^{-1})(x) = x$