Exercices de révision - Probabilités et Variables aléatoires

- PROBAER01. Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.
  On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
  – F l'événement « le membre choisi est une femme »,
  – T l'événement « le membre adhère à la section tennis ».
  a) Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à 2/5.
  b) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis. Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme?

$$P(T\,|\,H)=\frac{1}{3}\qquad P(T\,|\,F)=\frac{1}{4}$$

a)

	H	F	
T	$\frac{1}{3}P(H)$	$\frac{1}{4}P(F)$	0,30
T^c	$\frac{2}{3}P(H)$	$\frac{3}{4}P(F)$	0,70
	$P(H)$	$P(F)$	1

$$P(T)=\frac{3}{10}=P(T\,|\,H)\,P(H)+P(T\,|\,F)\,P(F)=\frac{1}{3}(1-P(F))+\frac{1}{4}P(F)$$

$$\frac{1}{12}P(F)=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$$

$$P(F)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

b) $$P(F\,|\,T)=\frac{P(F\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{4}\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

- PROBAER02. Supposons qu'un étudiant possède 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes grises et 2 paires de chaussettes brunes. Si, le matin, il choisit aléatoirement 2 chaussettes, quelle est la probabilité qu'elles aient la même couleur ?

$$P=\frac{C_4^2+C_6^2+C_{10}^2}{C_{20}^2}=\frac{45+15+6}{190}=\frac{33}{95}=0{,}3474$$

- PROBAER03. Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.
  On choisit, au hasard, un élève du lycée.
  Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

$P(F)=0{,}55\qquad P(C\,|\,F)=0{,}35\qquad P(C\,|\,G)=0{,}3$
$P(C)=P(C\,|\,F)\,P(F)+P(C\,|\,G)\,P(G)=0{,}35\times 0{,}55+0{,}3\times 0{,}45=0{,}3275$
$P(C^c)=0{,}6725$

- PROBAER04. Une urne contient 7 boules noires et 3 boules blanches. Ces 10 boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :
  Un joueur perd 9 € si les deux boules tirées sont de couleur blanche, il perd 1 € si les deux boules tirées sont de couleur noire et gagne 5 € si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.
  a) Déterminer le gain moyen du joueur à chaque partie.
  b) Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne 5 €, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes. Donner la valeur de p.
  c) Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
  On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que

le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
Quelle est la loi suivie par la v.a. X ?
Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} .
d) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

a) EX =

$$-9\,P(2\text{ blanches}) - 1\,P(2\text{ noires}) + 5\,P(\text{couleurs } \neq) = -9\,\frac{3}{10}\,\frac{3}{10} - 1\times\frac{7}{10}\,\frac{7}{10} + 5\times 2\times\frac{7}{10}\,\frac{3}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

b) $p = 2\times\frac{7}{10}\,\frac{3}{10} = \frac{21}{50} = 0{,}42$

c) Bi(n,p)

$p_n = 1 - P(\text{ne gagne aucune des } n \text{ parties}) = 1 - 0{,}58^n$

$p_{10} = 1 - 0{,}58^{10} = 0{,}995692$

d) $p_n > 0{,}99$

$1 - 0{,}58^n > 0{,}99$

$0{,}58^n < 0{,}01$

$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}58)} = 8{,}45409$

Il faut minimum 9 parties et la probabilité est alors de $1 - 0{,}58^9 = 0{,}992572$

- VAER01. Une sélection de 3 personnes doit être faite parmi un groupe de 6 dont quatre femmes et deux hommes. La sélection doit se faire au hasard. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X mesurant le nombre de femmes dans la sélection. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 p_i$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{5}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
Σ	1	$EX = 2$	$E(X^2) = \frac{22}{5}$

$\text{Var}(X) = E(X^2) - EX^2 = \frac{2}{5}$ $\quad\sigma = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}632456$

- VAER02. Participant à un jeu télévisé, Marie peut lancer 3 fois un dé. Si elle n'obtient aucun '6', elle perd 200€; si elle obtient un seul "6", elle gagne 200 € et si elle obtient "6" une deuxième fois le jeu s'arrête et elle gagne 600€. Doit-elle participer à ce jeu ?

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
-200	$\frac{125}{216}$	$-\frac{3125}{27}$
200	$\frac{25}{72}$	$\frac{625}{9}$
600	$\frac{2}{27}$	$\frac{400}{9}$
Σ	1	$EX = -\frac{50}{27}$

Non, son espérance de gain est négative!

$$\texttt{Y = VA}\left[\{-200,\ 200,\ 600\},\ \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3,\ 3\times\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2,\ 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^3\right\}\right]$$

- VAER03. Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.
  a) Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
  b) Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
  c) Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
  d) Calculer P[X = 5].

$P(P) = 0{,}3 \qquad P(\text{HS} \mid P) = 0{,}75 \qquad P(\text{HS} \mid N) = 0{,}4$

a) $P(HS) = P(HS \cap P) + P(HS \cap P^c) = P(HS|P)\, P(P) + P(HS|P^c)\, P(P^c)$

$P(\text{HS}) = 0{,}75 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}505$

b) $P(\text{HS}) = \dfrac{P(N \cap HS)}{P(N)} = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}3}{0{,}505} = 0{,}445545$

c) X~Bi(10,0.3)

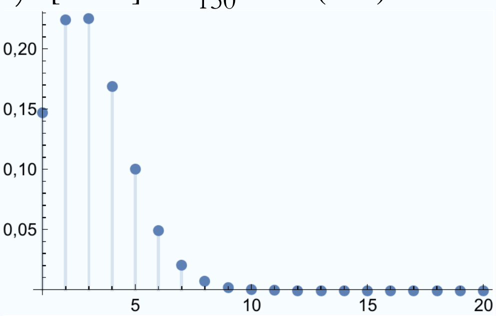
d) $P[X = 5] = C_{10}^{5}\ 0.3^5\ (0.7)^5 = 0.102919$

- VAER04. Une usine fabrique des composants. Un client commande un lot de 150 composants.
  On assimile le choix des 150 composants à des tirages successifs avec remise.
  On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de composants défectueux que contient ce lot. La probabilité qu'un composant soit défectueux est estimée à 2%.
  a) Justifier le fait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, et donner les paramètres de cette loi.
  b) Donner l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.
  c) Calculer la probabilité d'avoir exactement 4 composants défectueux dans le lot.
  d) On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
  e) Quelle valeur prendre pour λ ?
  f) Déterminer, avec la précision permise par les tables, la probabilité d'avoir strictement plus de 4 composants défectueux dans le lot.

a) X~Bi(150,0.02)

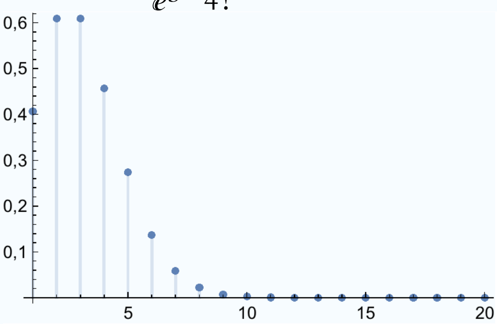
b) EX=3, Var X = 24, $\sigma = 4{,}89898$

c) $P[X = 4] = C_{150}^{4}\ 0.02^4\ (0.98)^{146} = 0.169735$



d) $\lambda = 3$

$P[X = 4] = \dfrac{1}{e^3}\ \dfrac{3^4}{4!} = 0.1680$



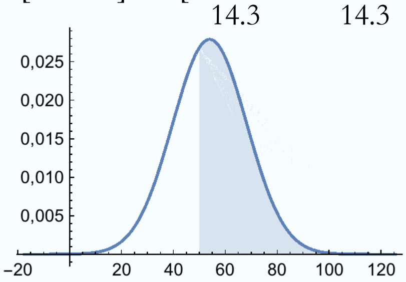
e) $P[X > 4] = 1 - P[X \leq 4] = 1 - 0.8153 = 0.1847$

1.a) Quelle est la probabilité qu'une puce prélevée au hasard dans le stock ne présente aucun défaut ?
1.b) Quelle est la probabilité qu'une puce prélevée au hasard dans le stock ne présente qu'un seul défaut ?
On prélève un lot de 100 puces; le stock étant très important on peut assimiler ce prélèvement à un tirage sans remise. On considère la variable aléatoire X, qui à chaque lot de 100 puces associe le nombre de puces défectueuses.
2.a) Montrer que X suit la loi Binomiale dont on déterminera les paramètres.
2.b) Si la probabilité d'avoir 5% de puces défectueuses dans un lot de 100 est supérieure à 0,15 alors la machine de production doit être révisée. Doit-on réviser la machine ?

1a) $0{,}97 \times 0{,}98 = 0{,}9506$
1b) $0{,}03 \times 0{,}98 + 0{,}97 \times 0{,}02 = 0{,}0488$
2a) $p = 1 - 0{,}9506 = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0494$
X~Bi(100,0.0494)
2b) $P[X = 5] = C_{100}^{5}\ 0.0494^{5}\ (0.9506)^{95} = 0.179949$
oui
$$P[X = 5] = \frac{1}{e^{5}} \frac{5^{5}}{5!} = 0.1755$$

- VAER07. La cote moyenne pour l'examen de mathématique de Noël est de 54% et son écart-type 14,3%.
  a) En supposant que ces résultats suivent une loi normale, calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard obtienne une cote supérieure à 50%.
  b) Sur trente élèves, à combien peut-on s'attendre d'échecs ?
  Même question pour l'examen de Juin qui suit la loi normale $N\left(62\,;\ 17{,}6^{2}\right)$

$P[X > 50] = P[\frac{X - 54}{14.3} > \frac{50 - 54}{14.3}] = P[Z > -0.27972] = P[Z \leq 0.27972] = 0.610154$



P[échec] = 0,3898

0,3898 × 30 = 11,694

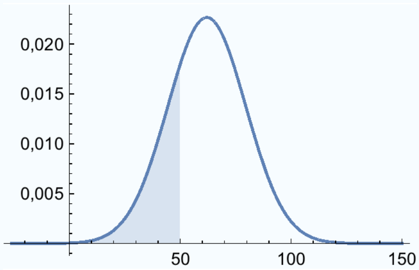
On peut s’attendre à 12 échecs en moyenne.

$N(62\,;\ 17{,}6^2)$

$P[X \leq 50] = P[\frac{X - 62}{17.6} \leq -0.681818\ ] =$

$P[Z \leq -0.681818] = 1 - P[Z > -0.681818] = 1 - P[Z \leq 0.681818] = 1 - 0.752323 = 0.247677$

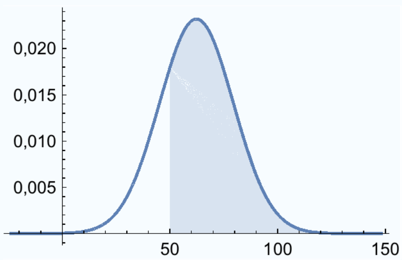
7 échecs



juin 2015: 7 échecs!

$P[X \leq 50] = P[\frac{X - 62.3}{17.2} \leq -0.715116\ ] =$

$P[Z \leq -0.715116] = 1 - P[Z > -0.715116] = 1 - P[Z \leq 0.715116] = 1 - 0.762731 = 0.237269$



7 échecs

- VAER08. Une entreprise produit en grande série des cylindres métalliques dont le diamètre, exprimé en mm, doit appartenir à l'intervalle de tolérance : [190;194].
  On considère que les cylindres dont le diamètre est inférieur à 190 mm sont irrécupérables alors que ceux dont le diamètre est supérieur à 194 mm peuvent être réusinés.
  Soit X la variable aléatoire qui, à chaque cylindre prélevé au hasard dans la production associe son diamètre en mm.
  On estime que la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $m = 192{,}16$ et $\sigma = 1{,}31$.

  a) Sur une série de 1000 cylindres produits, combien seront irrécupérables ?
  b) Et combien seront dans l'intervalle de tolérance ?

$N(192{,}16;\ 1{,}31^2)$

a) $P[X \le 190] = P[\frac{X - 192.16}{1.31} \le -1.64885\ ] =$

$P[Z \le -1.64885] = 1 - P[Z > -1.64885] = 1 - P[Z \le 1.64885] = 1 - 0.950411 = 0.0495887$

50 cylindres seront irrécupérables

b)

$P[190 \le X \le 194] = P[-1.64885 \le \frac{X - 192.16}{1.31} \le 1.40458] =$

$P[\ -1.64885 \le Z \le 1.40458] = P[Z \le 1.40458] - P[Z \le -1.64885] = 0.919927 - 0.0495887 = 0.870338$

870 cylindres seront dans l'intervalle de tolérance.

- VAER09. Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) du bus sur l'horaire officiel à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit la loi normale $N(5,\ 2^2)$

  a) Calculer la probabilité que le retard soit inférieur à 7 mn ;

  b) Calculer la probabilité que le retard soit supérieur a`9 mn. 0,0228

  c) Sachant que le retard est supérieur à 3 mn, quelle est la probabilité qu'il soit inférieur à 7 mn ?

a) $P[X \le 7] = P[\frac{X - 5}{2} \le 1\ ] = P[Z \le 1] = 0.8413$

b) $P[X > 9] = P[\frac{X - 5}{2} > \frac{9 - 5}{2}] = P[Z > 2] = 1 - P[Z \le 2] = 1 - 0.9772 = 0.0228$

c) $P[X \le 7 \mid X > 3] = \frac{P[X \le 7 \cap X > 3]}{P[X > 3]} = \frac{P[X \le 7 \cap X > 3]}{P[X > 3]} = \frac{0{,}683}{0{,}8413} = 0{,}811$

$P[X > 3] = P[\frac{X - 5}{2} > \frac{3 - 5}{2}] = P[Z > -1] = P[Z \le 1] = 0.8413$

$P[3 \le X \le 7] = P[-1 \le \frac{X - 5}{2} \le 1] =$

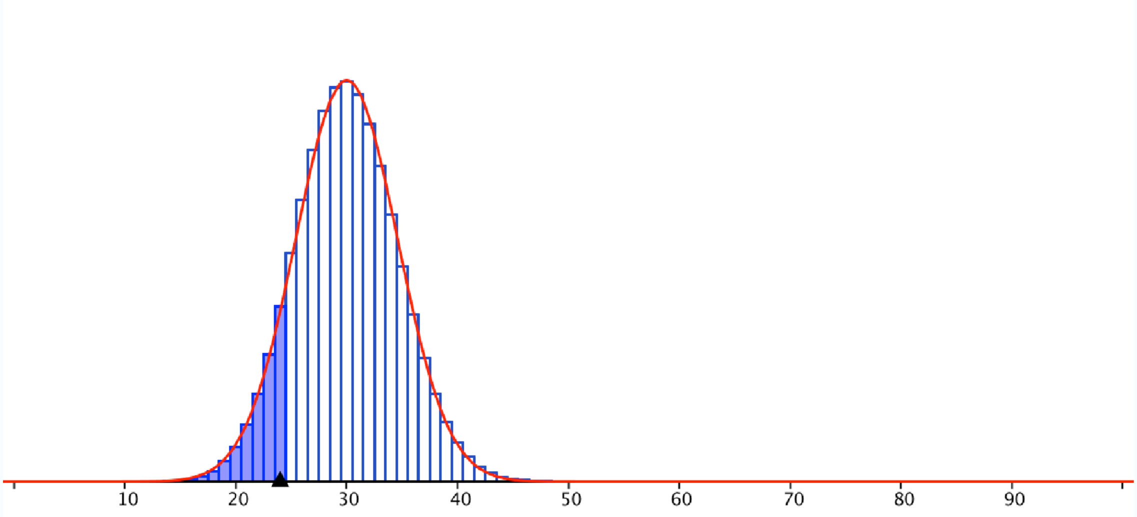
$P[\ -1 \le Z \le 1] = 1 - 2\ P[Z \le -1] = 2\ P[Z \le 1] - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.683$

- VAER10. On estime que la probabilité pour qu'une graine ait perdu son pouvoir germinatif après 3 ans de conservation est de 70%. Sur un échantillon de 100 graines conservées depuis 3 ans quelle est la probabilité pour que moins de 25 germent ? (Utiliser une approximation avec une loi normale)

$X \sim \text{Bi}(100; 0{,}3)$
On cherche $P[X < 25] = P[X \leq 24]$
avec un tableur, LOI.BINOMIALE(24; 100; 0,3; 1) = 0,114
à l'aide de la loi normale,
$X \simeq N(n\,p; n\,p\,q) = N(30; 21)$
Problème: faut-il calculer P[X < 25] ou P[X ≤ 24]) ?
La meilleure approximation sera obtenue en prenant la valeur intermédiaire 24,5. C'est ce qu'on appelle la « correction de continuité ».

$$P[X \leq 24{,}5] = P\left[Z \leq \frac{24{,}5 - 30}{\sqrt{21}}\right] = P[Z \leq -1{,}2] = 1 - P[Z \leq 1{,}2] = 1 - 0{,}8849 = 0{,}1151$$

On peut constater que ceci fournit une bonne approximation de la vraie valeur puisque l'erreur est de l'ordre du millième.



Solutions

- PROBAER01. $\frac{1}{3}$
- PROBAER02. 0.3474
- PROBAER03. 0.6725
- PROBAER04. 0.8 0.42 0.995692 9 parties
- VAER01. 2 2/5 0.632456
- VAER02. $EX = -\frac{50}{27}$ non!
- VAER03. 0.505 0.445545 0.102919
- VAER04. 0.169735 0.1847
- VAER05. 0.9506 0.0488 oui 0.18
- VAER07. 12 7
- VAER08. 50 870
- VAER09. 0,8413 0,0228 0,683
- VAER10. 0,115