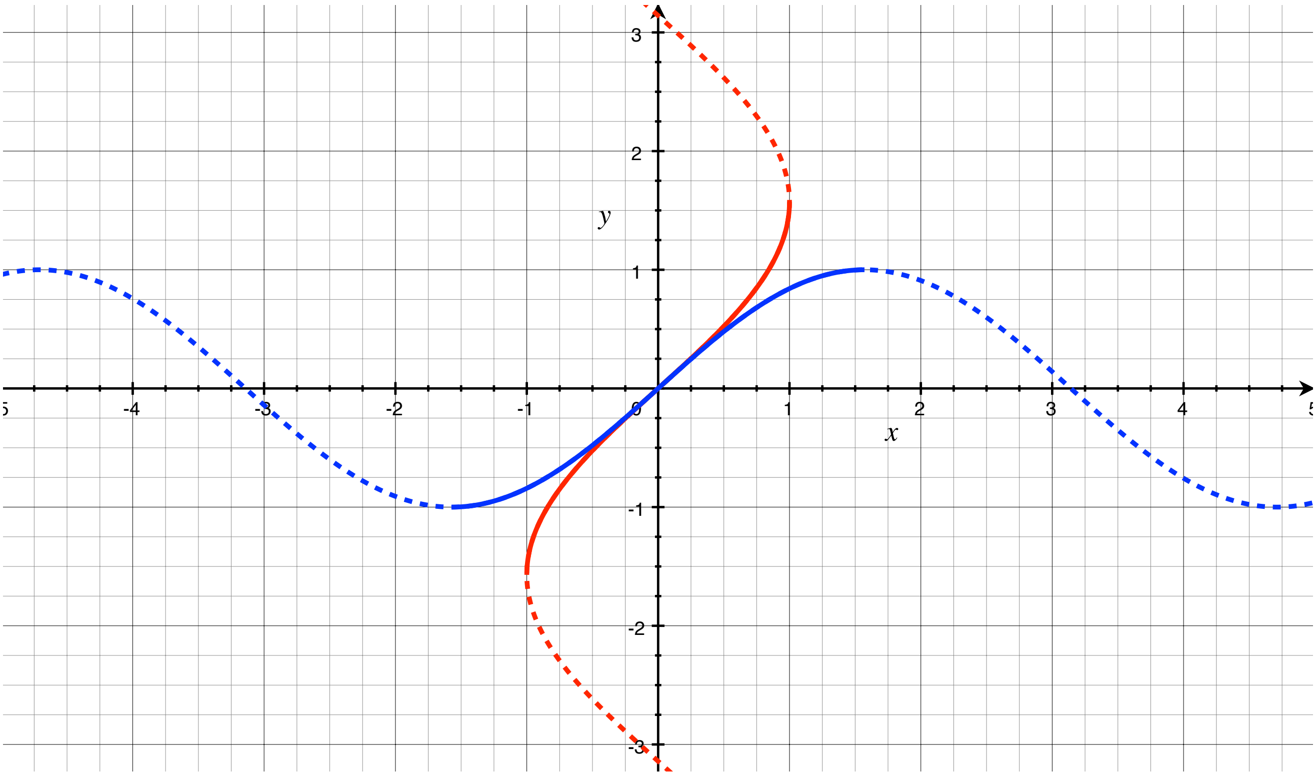
Fonctions cyclométriques

Fonction Arcsinus

La fonction sin x n'est pas injective.

En effet, prenons $x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. On a alors $f(x_1) = \frac{1}{2} = f(x_2)$.

La réciproque de sin x n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreind la fonction sinus à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Définition

$$\forall\, x \in [-1,\, 1] \;:\; \text{Arcsin}\, x = y \iff \sin y \;=\; x \;\text{ et }\; y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Dom $f = [-1,\, 1]$

Im $f = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- Racine(s): $x = 0$
  en effet, Arcsin $0 \;= 0$

- Parité: Arcsin est une fonction impaire
  $\forall\, x \in [-1,\, 1] :\; \text{Arcsin}(-x) = x$

- Propriétés
  (1) $\forall\, x \,\in\, [-1,\, 1] : \sin(\text{Arcsin}\, x) = x$
  (2) $\forall\, x \,\in\, \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \text{Arcsin}(\sin x) = x$

⚠ La propriété $\;\forall\, x \,\in\, \mathbb{R} :\; \text{Arcsin}(\sin x) = x\;$ est fausse !
Par exemple, $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \text{Arcsin}\, \frac{1}{2} \;=\; \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$

- Continuité
  $\forall\, a \in [-1,\, 1] :\; \lim\limits_{x \to a} \text{Arcsin}\, x \;= \text{Arcsin}\, a$
  Arcsin est continue sur $[-1,\, 1]$

- Dérivée

$(\text{Arcsin } x)' = \dfrac{1}{\cos(\text{Arcsin } x)}$

sachant que $\cos^2 t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t}$ et que Arcsin $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$(\text{Arcsin } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\text{Arcsin } x)}}$

et à l'aide de la propriété (1)

$$\boxed{(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

- Croissance

La fonction Arcsin x est strictement croissante sur $[-1, 1]$

x		-1		1	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	/	|	+	|	/
$f(x)$	/	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	/

Remarque: Pour $x = -1$ et $x = 1$, la dérivée de Arcsin n'existe pas.

On a $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ce qui donne une tangente verticale en -1 et 1.

- Concavité

$(\text{Arcsin } x)'' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

x		-1		0		1	
$\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$	/	|	$-$	0	$+$	|	/
$f(x)$	/	$-\frac{\pi}{2}$	$\frown$	0	$\smile$	$\frac{\pi}{2}$	/

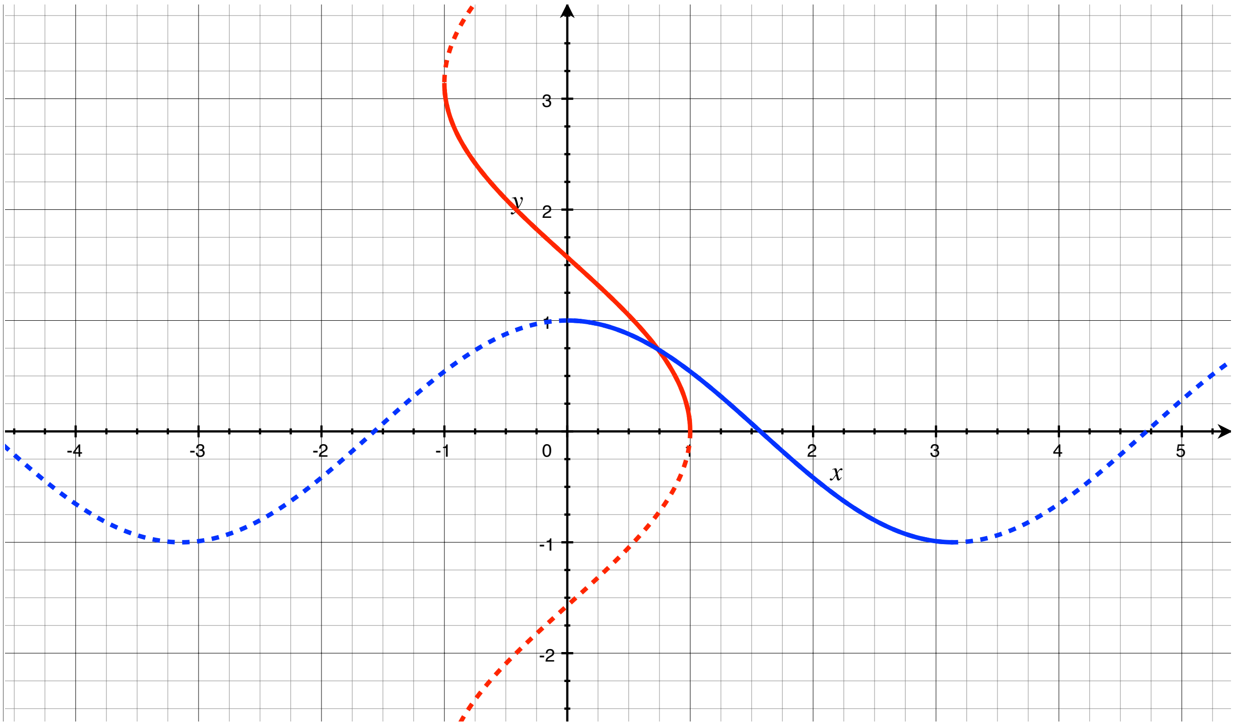
I : (0,0)

Fonction Arccosinus

La fonction $\cos x$ n'est pas injective.

Prenons $x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = -\frac{\pi}{6}$. On a alors $f(x_1) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos -\frac{\pi}{6} = f(x_2)$.

La réciproque de $\cos x$ n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreind la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$.

- Définition

$$\forall\, x \in [-1,\, 1] \;:\; \text{Arccos}\, x = y \iff \cos y \;=\; x \;\text{ et }\; y \;\in\; [0,\, \pi]$$

- dom Arccos $= [-1,\, 1]$
  im Arccos $= [0,\, \pi]$

- Racine(s): $x = 1$
  Arccos $1 = 0$ car $\cos 0 = 1$

- Parité: Arccos n'est ni paire ni impaire

- Propriétés
  (1) $\forall\, x \,\in\, [-1,\, 1] :\; \cos(\text{Arccos}\, x) = x$
  (2) $\forall\, x \,\in\, \left[\frac{-\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right] :\; \text{Arcsin}(\sin x) = x$
  ⚠ La propriété $\forall\, x \,\in\, \mathbb{R} :\; \text{Arccos}(\cos x) = x$ est fausse !
  En effet, $\text{Arccos}\left(\cos\frac{-\pi}{4}\right) = \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \;=\; \frac{\pi}{4} \neq \frac{-\pi}{4}$

- Continuité
  $\forall\, a \in [-1,\, 1] :\; \lim\limits_{x \to a} \text{Arccos}\, x \;= \text{Arccos}\, a$
  Arccos est continue sur $[-1,\, 1]$

- Dérivée

$$(\text{Arccos}\, x)' = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}\, x)}$$

sachant que $\sin^2 t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t}$ et que Arccos $x \in [0, \pi]$, on a

$$(\text{Arccos}\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos}\, x)}}$$

et à l'aide de la propriété (1)

$$\boxed{(\text{Arccos}\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

- Croissance:

La fonction Arccos x est strictement croissante sur $[-1, 1]$

x		-1		1	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	/	|	$-$	|	/
$f(x)$	/	π	$\searrow$	0	/

Remarque: Pour $x = -1$ et $x = 1$, la dérivée de Arccos n'existe pas.

On a $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ce qui donne une tangente verticale en -1 et 1.

- Concavité

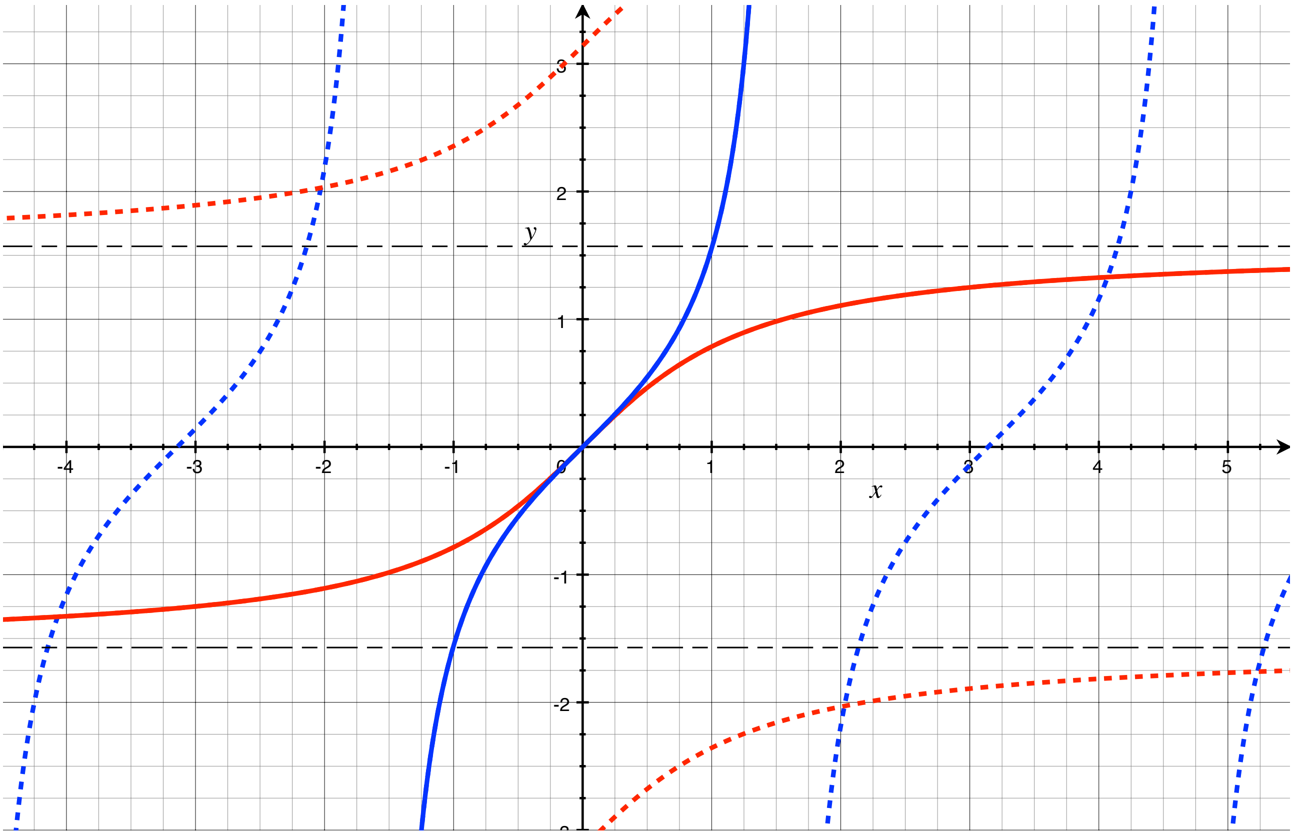
$$(\text{Arccos}\, x)'' = \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

x		-1		0		1	
$-\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$	/	|	$+$	0	$-$	|	/
$f(x)$	/	π	$\smile$	$\frac{\pi}{2}$	$\frown$	0	/

$\text{I} : (0, \frac{\pi}{2})$

Fonction Arctangente

La fonction tg x n'est pas injective.
Prenons $x_1 = 0$ et $x_2 = \pi$. On a alors $f(x_1) = \text{tg}\, 0 = 0 = \text{tg}\, \pi = f(x_2)$.
La réciproque de tg x n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreind la fonction tangente à l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- Définition

$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \text{Arctg}\, x = y \iff \text{tg}\, y = x \text{ et } y \in]-\pi/2\,,\,\pi/2[$$

- dom Arctg $= \mathbb{R}$
  im Arctg $=]-\pi/2\,,\,\pi/2[$

- Racine(s): $x = 0$
  en effet: Arctg $(0) = 0$

- Parité: Arctg est une fonction impaire
  $\forall x \in \mathbb{R}$: Arctg$(-x) = x$

- Propriétés:
  (1) $\forall x \in \mathbb{R}$: tg(Arctg x) $= x$
  (2) $\forall x \in [0, \pi]$: Arctg(tg x) $= x$
  ⚠ La propriété $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$: Arctg(tg x) $= x$ est fausse !
  En effet, Arctg(tg π) = Arctg0 = $0 \neq \pi$

- Dérivée
  $$(\text{Arctg}\, x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\text{Arctg}\, x)}}$$
  sachant que $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \text{tg}^2\, t$,
  $$(\text{Arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\text{Arctg}\, x)}$$
  et en utilisant la proposition (1)

$$\boxed{(\text{Arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

- Croissance

La fonction Arctg x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	
$\frac{1}{x^2+1}$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

- Concavité

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

x		0	
$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	0	$\frown$

I : (0,0)