Méthode de résolution d'une équation du second degré

Résoudre l'équation $a x^2 + b x + c = 0$

On commence par mettre en évidence a, le coefficient de x^2

$$a\left(x^2 + \frac{b x}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Ensuite on divise les 2 membres de l'équation par a, ce qui donne

$$x^2 + \frac{b x}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Recherchons maintenant le carré parfait commençant par $x^2 + \frac{b x}{a}$

C'est $\left(\frac{b}{2 a} + x\right)^2 = \frac{b^2}{4 a^2} + \frac{x b}{a} + x^2$

L'équation devient alors

$$x^2 + \frac{b x}{a} + \frac{b^2}{4 a^2} - \frac{b^2}{4 a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Ou encore, en utilisant le carré parfait

$$\left(\frac{b}{2 a} + x\right)^2 - \frac{b^2}{4 a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Ce qui donne

$$\left(\frac{b}{2 a} + x\right)^2 - \frac{b^2 - 4 a c}{4 a^2} = 0$$

En factorisant la différence de deux carrés, nous avons alors

$$\left(\frac{b}{2 a} + x - \frac{\sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}\right)\left(\frac{b}{2 a} + x + \frac{\sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}\right) = 0$$

ce qui donne, par la règle du produit nul

$$\frac{b}{2 a} + x - \frac{\sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} = 0 \text{ ou } \frac{b}{2 a} + x + \frac{\sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} = 0$$

c'est–à–dire

$$\text{x} = \frac{\sqrt{b^2 - 4 a c} - b}{2 a} \text{ ou } \text{x} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

Exercices résolus:

1) Résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$

2) Résoudre l'équation $x^2 + 2x + 3 = 0$

3) Résoudre l'équation $3x^2 - 4x + 1 = 0$

5) Résoudre l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$

5) Résoudre l'équation $4x^2 + 11x - 3 = 0$

Solutions

1) Résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$

On commence par mettre en évidence a, le coefficient de x^2

$$2\left(x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0$$

Ensuite on divise les 2 membres de l'équation par a, ce qui donne

$$x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Recherchons maintenant le carré parfait commençant par $x^2 + \frac{5x}{2}$

C'est $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{25}{16}$

L'équation devient alors

$$x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = 0$$

Ou encore, en utilisant le carré parfait

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = 0$$

Ce qui donne

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0$$

En factorisant la différence de deux carrés, nous avons alors

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0$$

ce qui donne, par la règle du produit nul

$$x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$

c'est–à–dire

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -3$$

2) Résoudre l'équation $x^2 + 2x + 3 = 0$

On commence par mettre en évidence a, le coefficient de x^2

$x^2 + 2x + 3 = 0$

Ensuite on divise les 2 membres de l'équation par a, ce qui donne

$x^2 + 2x + 3 = 0$

Recherchons maintenant le carré parfait commençant par $x^2 + 2x$

C'est $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

L'équation devient alors

$x^2 + 2x + 1 - 1 + 3 = 0$

Ou encore, en utilisant le carré parfait

$(x+1)^2 - 1 + 3 = 0$

Ce qui donne

$(x+1)^2 + 2 = 0$

C'est une somme de carrés et donc l'équation est impossible!

3) Résoudre l'équation $3x^2 - 4x + 1 = 0$

On commence par mettre en évidence a, le coefficient de x^2

$$3\left(x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0$$

Ensuite on divise les 2 membres de l'équation par a, ce qui donne

$$x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

Recherchons maintenant le carré parfait commençant par $x^2 - \frac{4x}{3}$

C'est $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}$

L'équation devient alors

$$x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = 0$$

Ou encore, en utilisant le carré parfait

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = 0$$

Ce qui donne

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = 0$$

En factorisant la différence de deux carrés, nous avons alors

$$(x - 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

ce qui donne, par la règle du produit nul

$x - 1 = 0$ ou $x - \frac{1}{3} = 0$

c'est–à–dire

x = 1 ou x = $\frac{1}{3}$

4) Résoudre l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$

On commence par mettre en évidence a, le coefficient de x^2

$$2\left(x^2 - \frac{x}{2} - 3\right) = 0$$

Ensuite on divise les 2 membres de l'équation par a, ce qui donne

$$x^2 - \frac{x}{2} - 3 = 0$$

Recherchons maintenant le carré parfait commençant par $x^2 - \frac{x}{2}$

C'est $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$

L'équation devient alors

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - 3 = 0$$

Ou encore, en utilisant le carré parfait

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 3 = 0$$

Ce qui donne

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0$$

En factorisant la différence de deux carrés, nous avons alors

$$(x - 2)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

ce qui donne, par la règle du produit nul

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{3}{2} = 0$$

c'est-à-dire

$$\text{x} = 2 \quad \text{ou} \quad \text{x} = -\frac{3}{2}$$

5) Résoudre l'équation $4x^2 + 11x - 3 = 0$

On commence par mettre en évidence a, le coefficient de x^2

$$4\left(x^2 + \frac{11x}{4} - \frac{3}{4}\right) = 0$$

Ensuite on divise les 2 membres de l'équation par a, ce qui donne

$$x^2 + \frac{11x}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

Recherchons maintenant le carré parfait commençant par $x^2 + \frac{11x}{4}$

C'est $\left(x + \frac{11}{8}\right)^2 = x^2 + \frac{11x}{4} + \frac{121}{64}$

L'équation devient alors

$$x^2 + \frac{11x}{4} + \frac{121}{64} - \frac{121}{64} - \frac{3}{4} = 0$$

Ou encore, en utilisant le carré parfait

$$\left(x + \frac{11}{8}\right)^2 - \frac{121}{64} - \frac{3}{4} = 0$$

Ce qui donne

$$\left(x + \frac{11}{8}\right)^2 - \frac{169}{64} = 0$$

En factorisant la différence de deux carrés, nous avons alors

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 3) = 0$$

ce qui donne, par la règle du produit nul

$$x - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$

c'est–à–dire

$$x = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x = -3$$