Résoudre les équations suivantes dans R

$2\sin x + 1 = 0$

$\sqrt{2}\cos 2x + 1 = 0$

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$

$3\cos x - 2 = 0$

$\sin 3x + 1 = 0$

$2\,\mathrm{tg}\,x - 5 = 0$

$2\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$

$2\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} = 0$

$3\cos x + 4 = 0$

$4\sin^2 x - 1 = 0$

Sachant que cos a = 1/3 et que sin a < 0, calculer

a) sin a

b) tg a

c) cos 2a

d) tg 2a

(c et d : utiliser les formules de duplication)

Justifier la limite suivante pour x > 0.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Calculer les limites suivantes

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{tg}\,3x} =$

$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{x} =$

$\lim_{x \to \pi} \frac{x}{\mathrm{tg}\,2x} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} =$

Vérifier les égalités suivantes

$\frac{1}{\cos 2a} = \frac{\mathrm{cotg}^2 a + 1}{\mathrm{cotg}^2 a - 1}$

$1 + \mathrm{tg}\,2a.\,\mathrm{tg}\,a = \frac{1}{\cos 2a}$

$(1 + \mathrm{tg}\,a)^2 + (1 - \mathrm{tg}\,a)^2 = \frac{2}{\cos^2 a}$

$\frac{\mathrm{cotg}\,a - \mathrm{tg}\,a}{\mathrm{cotg}\,a + \mathrm{tg}\,a} = \cos 2a$

$\cos(a - b).\cos(a + b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

$\sin(a - b).\sin(a + b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + a) - \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - a) = 2\,\mathrm{tg}\,2a$

Exprimer en fonction des nombres trigonométriques de a

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3} + a)$

$\cos(\frac{\pi}{4} - a)$

$\mathrm{tg}(\frac{2\pi}{3} - a)$

$\sin(\frac{3\pi}{4} - a)$

sin 4a

tg 4a

Paire ou Impaire ?

$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$

$f(x) = 1 + \cos 2x$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$f(x) = \operatorname{tg} 2x$

$f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x + 1}$

$f(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x}$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Déterminer la plus petite période des fonctions suivantes

$f(x) = \sin 3x \quad f(x) = \operatorname{tg} 2x \quad f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Solutions

Résoudre les équations suivantes dans R

$2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$

$\sin x = \sin - \dfrac{\pi}{6}$

$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

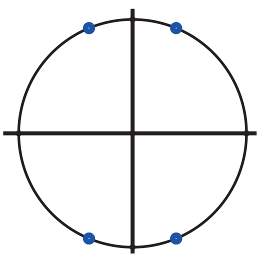
$\sqrt{2}\cos 2x + 1 = 0$

$\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 2x = \cos \dfrac{3\pi}{4}$

$\begin{cases} 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \\ x = -\dfrac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$



$3\cos x - 2 = 0$

$\cos x = \dfrac{2}{3}$

$\cos x \simeq \cos 0,8411$

$\begin{cases} x \simeq 0,8411 + 2k\pi \\ x \simeq -0,8411 + 2k\pi \end{cases}$

$\sin 3x + 1 = 0$

$\sin 3x = -1$

$3x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$

$2\operatorname{tg} x - 5 = 0$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{5}{2}$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 1,1903$

$x = 1,1903 + k\pi$

$2\cos(2x - \dfrac{\pi}{4}) + 1 = 0$

$\cos(2x - \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{2}$

$\cos(2x - \dfrac{\pi}{4}) = \cos \dfrac{2\pi}{3}$

$\begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{11\pi}{24} + k\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{24} + k\pi \end{cases}$

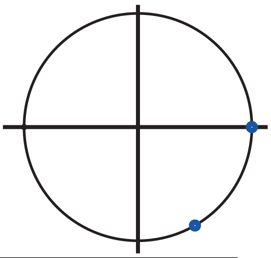
$$2\sin(x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}=0$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin-\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$



$$3\cos x+4=0$$

$$\cos x=-\frac{4}{3}$$

$$\textit{impossible}, -1\le\cos x\le 1$$

$$4\sin^2 x-1=0$$

$$(2\sin x+1)(2\sin x-1)=0$$

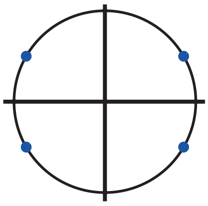
règle du produit nul

$$\sin x=-\frac{1}{2} \quad ou \quad \sin x=\frac{1}{2}$$

$$\sin x=\sin-\frac{\pi}{6} \quad ou \quad \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \end{cases}$$



Sachant que cos a = 1/3 et que sin a < 0, calculer

a) sin a

$$\sin^2 a=1-\cos^2 a=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\sin a=-2\frac{\sqrt{2}}{3}$$

b) tg a

$$\text{tg}\, a=\frac{-2\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$$

c) cos 2a

$$\cos 2x=\cos^2 a-\sin^2 a=\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=-\frac{7}{9}$$

d) tg 2a

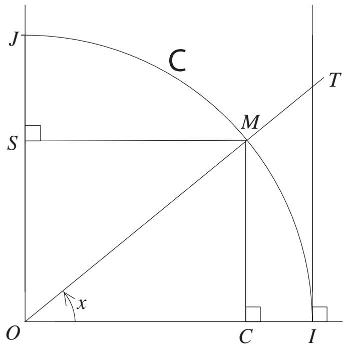
$$\text{tg}\, 2a=\frac{2\,\text{tg}\, a}{1-\text{tg}^2 a}=\frac{-4\sqrt{2}}{1-8}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

(c et d : utiliser les formules de duplication)

Justifier la limite suivante pour x > 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

voir cours...



sur le dessin, en comparant les surfaces du triangle OIM ($\frac{\sin x}{2}$), du secteur angulaire OIM ($\frac{x}{2}$) et du triangle OIT ($\frac{\text{tg}\, x}{2}$), on obtient

sin x < x < tg x

en divisant par sin x, on a

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

en faisant tendre x vers 0, on a alors

$$1\le\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\le\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

et

$$1\le\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\le 1$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.2=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{tg}\, 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x.\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}.\frac{\cos 3x}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{x}=\frac{\sin 3\pi}{\pi}=0$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=[\frac{\pi}{0}]$$

$$\lim_{x\underset{>}{\longrightarrow}\pi}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\underset{>}{\longrightarrow}\pi}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=-\infty$$

Vérifier les égalités suivantes

$$\frac{1}{\cos 2a}=\frac{\operatorname{cotg}^2 a+1}{\operatorname{cotg}^2 a-1}$$

$$\frac{1}{\cos 2a}=\frac{\dfrac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\sin^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin^2 a}}$$

$$1+\operatorname{tg}2a.\operatorname{tg}a=\frac{1}{\cos 2a}$$

$$1+\frac{\sin 2a}{\cos 2a}.\frac{\sin a}{\cos a}$$

$$1+\frac{2\sin^2 a}{\cos 2a}$$

$$\frac{\cos 2a+2\sin^2 a}{\cos 2a}$$

$$\frac{\cos 2a+1-\cos 2a}{\cos 2a}$$

$$(1+\operatorname{tg}a)^2+(1-\operatorname{tg}a)^2=\frac{2}{\cos^2 a}$$

$$1+2\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}^2 a+1-2\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}^2 a$$

$$2(1+\operatorname{tg}^2 a)$$

$$2(1+\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a})$$

$$2(\frac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\cos^2 a})$$

$$\frac{\operatorname{cotg}a-\operatorname{tg}a}{\operatorname{cotg}a+\operatorname{tg}a}=\cos 2a$$

$$\frac{\dfrac{\cos a}{\sin a}-\dfrac{\sin a}{\cos a}}{\dfrac{\cos a}{\sin a}+\dfrac{\sin a}{\cos a}}=\frac{\dfrac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a.\cos a}}{\dfrac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\sin a.\cos a}}$$

$$\cos(a-b).\cos(a+b)=\cos^2 a-\sin^2 b$$

$$(\cos a.\cos b+\sin a.\sin b).(\cos a.\cos b-\sin a.\sin b)$$

$$\cos^2 a.\cos^2 b-\sin^2 a.\sin^2 b$$

$$\cos^2 a.(1-\sin^2 b)-\sin^2 b.(1-\cos^2 a)$$

$$\cos^2 a-\sin^2 b$$

$$\sin(a-b).\sin(a+b)=\sin^2 a-\sin^2 b$$

$$(\sin a.\cos b-\sin b.\cos a).(\sin a.\cos b+\sin b.\cos a)$$

$$\sin^2 a.\cos^2 b-\sin^2 b.\cos^2 a$$

$$\sin^2 a.(1-\sin^2 b)-\sin^2 b.(1-\sin^2 a)$$

$$\sin^2 a-\sin^2 b$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+a)-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-a)=2\operatorname{tg}2a$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}a}-\frac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a}$$

$$\frac{(1+\operatorname{tg}a)^2-(1-\operatorname{tg}a)^2}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

$$\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

Exprimer en fonction des nombres trigonométriques de a

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}+a)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.\operatorname{tg}a}=\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}a}{1-\sqrt{3}.\operatorname{tg}a}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4}-a)=\cos\frac{\pi}{4}.\cos a+\sin\frac{\pi}{4}.\sin a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a+\sin a)$$

$$\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{3}-a)=\frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}.\operatorname{tg}a}=\frac{-\sqrt{3}-\operatorname{tg}a}{1-\sqrt{3}.\operatorname{tg}a}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{4}-a)=\sin\frac{3\pi}{4}\cos a-\sin a\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a+\sin a)$$

sin 4a=sin(2.2a)=2sin2a.cos2a

=2.2.sina.cosa.($\cos^2 a-\sin^2 a$)

$$=4\sin a.\cos^3 a-4\sin^3 a.\cos a$$

$$\operatorname{tg} 4a = \frac{2\operatorname{tg} 2a}{1-\operatorname{tg}^2 2a} = \frac{\dfrac{4\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}}{1-\left(\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}\right)^2}$$

$$= \frac{4\operatorname{tg} a.(1-\operatorname{tg}^2 a)}{(1-\operatorname{tg}^2 a)^2 - 4\operatorname{tg}^2 a}$$

$$= \frac{4\operatorname{tg} a - 4\operatorname{tg}^3 a}{1+\operatorname{tg}^4 a - 6\operatorname{tg}^2 a}$$

Paire ou Impaire ?

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1-\cos x}$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-2x)}{1-\cos(-x)} = \frac{-\sin 2x}{1-\cos x} = -f(x)$$

fonction impaire

$$f(x) = 1+\cos 2x$$

$$f(-x) = 1+\cos(-2x) = 1+\cos 2x = f(x)$$

fonction paire

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \operatorname{tg} 2x$$

$$CE: 2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Dom} f = R \setminus \{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

$$CE: 1-\cos x \neq 0$$

$$\cos x \neq 1$$

$$\cos x \neq \cos 0$$

$$x \neq 0+2k\pi$$

$$\operatorname{Dom} f = R \setminus \{2k\pi\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x+1}$$

$$CE: x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \quad et \quad \operatorname{tg} x \neq -1$$

$$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \quad et \quad \operatorname{tg} x \neq \operatorname{tg}-\frac{\pi}{4}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \quad et \quad x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\operatorname{Dom} f = R \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{4}+k\pi\}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$CE: \sin x \neq 0$$

$$\sin x \neq \sin 0$$

$$x \neq 0+2k\pi \quad et \quad x \neq \pi - 0 + 2k\pi$$

$$\operatorname{Dom} f = R \setminus \{2k\pi\ ,\ \pi+2k\pi\}$$

oubien

$$\operatorname{Dom} f = R \setminus \{k\pi\}$$

Déterminer la plus petite période des fonctions suivantes

rappels:

- sin x et cos x sont de période 2π, tg x est de période π.
- si f(x) est de période p, alors f(k.x) est de période p/k.

$$f(x) = \sin 3x$$

$$période\ \frac{2\pi}{3}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} 2x$$

$$période\ \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

non périodique

il n'existe pas de réel p tel que $\dfrac{\sin(x+p)}{x+p} = \dfrac{\sin x}{x}$