NOM :

INSTITUT SAINTE URSULE

CLASSE : 5B – C
SALLE DE GYM
F. MÉLOTTE
NOEL 2005

CONTRÔLE DE MATHEMATIQUE (4h/sem)

Instructions :
- *Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.*
- *Ne pas répondre sur le questionnaire.*
- *Répondre aux questions **dans l'ordre**, tracez une ligne entre chaque question.*
- *Tout résultat doit être justifié clairement et complètement.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2+7x-4}{x-1}}$ $dom\, f=[-4,\frac{1}{2}]\ \cup\ ]1,\rightarrow$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-9x+20}}$ $dom\, f=\leftarrow,4]\ \cup\ ]5,\rightarrow$

2. La relation réelle qui à x fait correspondre y tel que $x^2+y^2=1$ est-elle une fonction ? Justifier.

Si on prend x = 0, on obtient
$0+y^2=1$
et donc
$y=\pm1$
ce qui donne 2 images au réel 0
ce n'est donc pas une fonction

3. Etudier la parité des fonctions suivantes. Justifier.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{5+x^2}$ paire b) $f(x)=x^2-3x+1$ ni paire ni impaire

4. Justifier la formule donnant la somme des n premières termes d'une suite arithmétique. Appliquer à la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 3 en calculant S_{10}.

Justification : voir cours

$t_{10}=t_1+9.r=5+9.3=32$

$S_{10}=\dfrac{(t_1+t_n).n}{2}=\dfrac{10.(5+32)}{2}=185$

5. A = [-1 , 4[. Les réels 4 et 8 adhèrent-ils à A ? Justifier.

4 adhère à A. En effet,
]4-r,4+r[$\cap$ A est non vide puisqu'elle contient l'intervalle]4-r,4[
avec $r\le 5$
Si r>5, l'intersection est égale à A
8 n'adhère pas à A. En effet, on peut trouver un intervalle ouvert centré en 8
qui a une intersection vide avec A.
Il suffit de prendre r = 1 par exemple, ce qui donne
]8-1,8+1[$\cap$ [-1,4[= $\varnothing$
]7,9[$\cap$ [-1,4[= $\varnothing$

6. Définir la notion de limite réelle d'une fonction en un réel a. A l'aide de cette définition, justifier la limite suivante

$$\lim_{x \to -2} 2x + 1 = -3$$

définition: voir cours

$-2 \in$ domf=R

$\forall r > 0, \exists s > 0, \forall x \in R$:

$|x+2| < s \Rightarrow |2x+1+3| < r$

$|x+2| < s \Rightarrow |2x+4| < r$

$|x+2| < s \Rightarrow |x+2| < \frac{r}{2}$

il suffit de prendre s=$\frac{r}{2}$

7. Pour la fonction f(x) dont le graphe cartésien est représenté ci-dessous, déterminer

a) Dom f

$= [-5,-3[\;\cup\;]-3,-2[\;\cup$

$= [-5,\rightarrow \;\backslash\{-3,-2\}$

b) Im f $= [-2,\rightarrow$

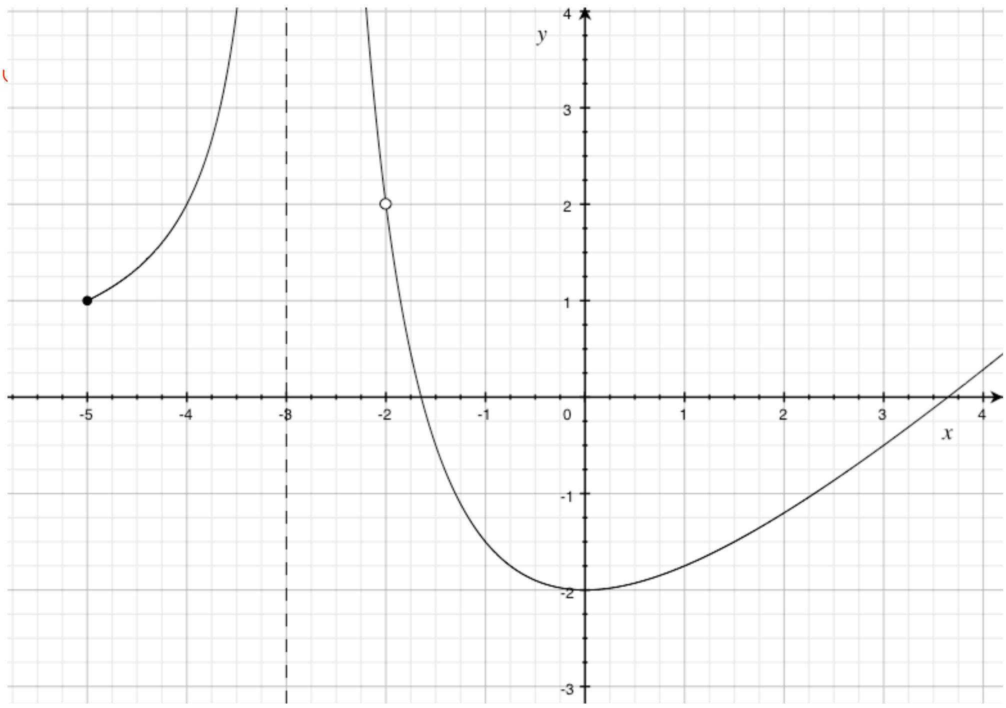
c) $\lim_{x \to -5} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$

f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

g) dom$_c$ f $=$ *dom f*



8. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{a.x-1}{x+b}$ où a et b sont réels. Quelles valeurs donner à a et b pour que cette fonction admette une asymptote verticale $AV \equiv x = 2$ et une asymptote horizontale $AH \equiv y = 3$? Justifier.

Pour que la fonction admette une AV $\equiv$ x=2, il faut que le dénominateur s'annule en 2 (et pas le numérateur); il suffit donc de prendre b = -2.

NOM :

Pour que la fonction admette une AH ≡ y=3, il faut que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a.x-1}{x+2}=3$$

il suffit de prendre a=3, on a alors

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x}=3$$

9. Calculer les limites suivantes

$$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}=[\frac{0}{0}]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+3-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{1}{18}$$

$$b)\ b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}==-2$$

10. Déterminer les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes

$$a)\ f(x)=\frac{2x^2+3x-7}{x+3}$$

$dom\,f=R\setminus\{-3\}$

$$\lim_{x\to-3}f(x)=[\frac{2}{0}]$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-3^+}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-3^-}f(x)=-\infty\end{array}\right\}AV\equiv x=-3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty\end{array}\right\}\text{pas d'AH}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+3x-7-2x(x+3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x-7}{x+3}=-3\end{array}\right\}AO\equiv y=2x-3$$

$$b)\ f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$$

$dom\,f=\ \leftarrow,-1]\cup[4,\rightarrow$

pas d'AV

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$$

pas d'AH

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-4-x^2}{\sqrt{x^2-3x-4}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{-3}{2}\end{array}\right\}AO\equiv y=x-\frac{3}{2}\text{ à droite}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=-1\\[2ex]\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-4-x^2}{\sqrt{x^2-3x-4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2}-x}=\frac{3}{2}\end{array}\right\}AO\equiv y=-x+\frac{3}{2}\text{ à gauche}$$

c) $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x^2-3x+1}$

$dom\,f=\mathbb{R}\backslash\{1,\frac{1}{2}\}$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty\\\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty\end{array}\right\}AV\equiv x=1$$

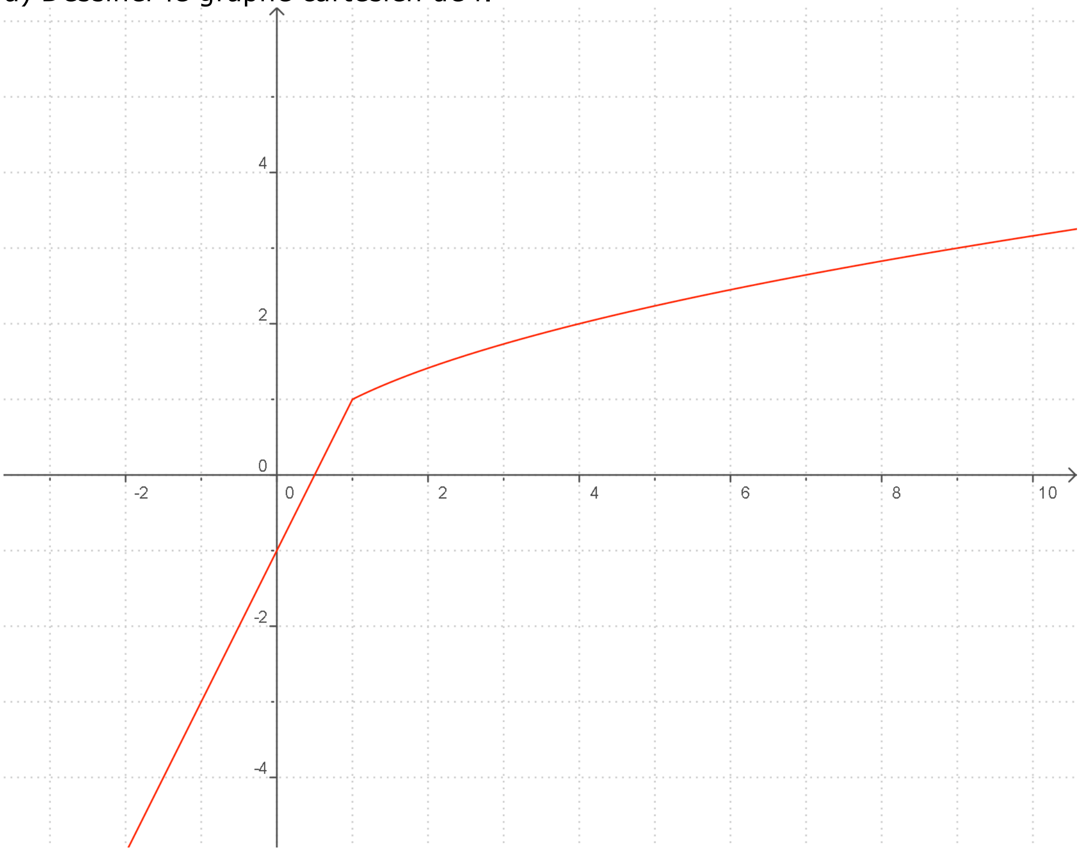
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=[\tfrac{0}{0}]=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2(2x-1)}{(2x-1)(x-1)}=-4$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0$$

AH ≡ y=0

11. On considère la fonction $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<1\\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq1\end{cases}$

a) Dessiner le graphe cartésien de f.



b) Déterminer son domaine de définition.

Dom f = R

c) Cette fonction est-elle continue en 1 ? Justifier.

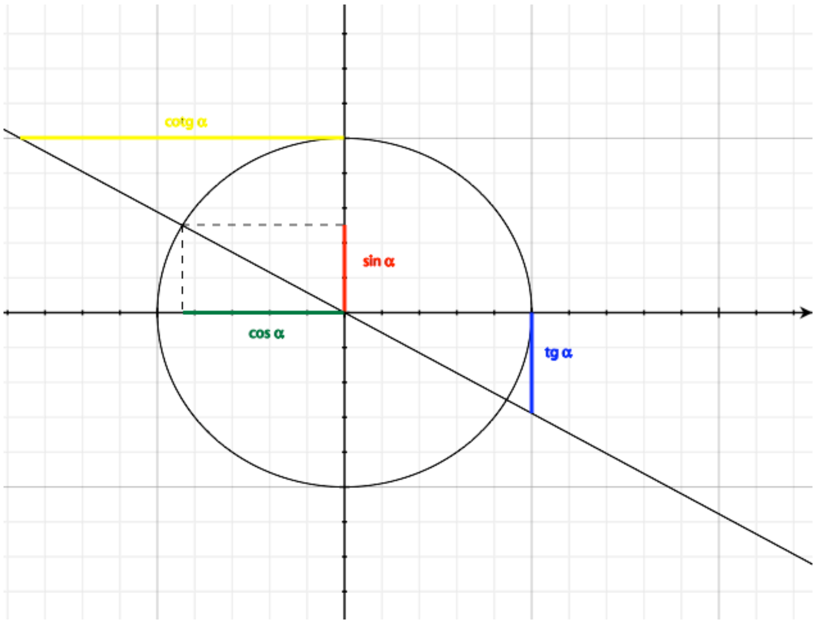
oui

f(1)=1 et

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

donc $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

12. Représenter dans le cercle trigonométrique et donner la valeur numérique des nombres trigonométriques de $\frac{2\pi}{3}$.



$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\mathrm{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\mathrm{cotg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. VRAI ou FAUX ? Justifier.

a) Une fonction réelle peut être à la fois paire et impaire.

VRAI
Si une fonction est à la fois paire et impaire, alors f(-x) = f(x) et f(-x)=-f(x) $\forall x \in \mathrm{Dom} f$
Il suffit de prendre f(x) = 0. Cette fonction est bien paire et impaire!

Ce n'est pas la seule, on peut aussi limiter la fonction à un domaine de définition symétrique par rapport à l'origine...

b) Une fonction ne peut admettre plus d'une asymptote verticale.

FAUX

$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$ admet deux asymptotes verticales

en effet,

$\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

et

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

c) une fonction paire admet un nombre pair de racines.

FAUX

$f(x) = x^2$ est paire et n'admet qu'une seule racine

en effet,

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ fct paire

f(x)=0

$x^2 = 0$

$x = 0$ une seule racine

JOYEUX NOEL!