PROBABILITÉS

1 Définitions

1) On appelle **expérience aléatoire** tout phénomène qui a plusieurs résultats possibles, la réalisation de chacun étant due au hasard.

exemple : L'expérience qui consiste à lancer une seule fois un dé à six faces.

2) On note Ω l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

Ω = { } est l'ensemble des résultats possibles.

3) On appelle **événement** A tout sous-ensemble de Ω.
- Le sous-ensemble ∅ est nommé **événement impossible**.
- Le sous-ensemble Ω est nommé **événement certain**.

A = "obtenir un point impair" A = { }

4) Un événement A est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience appartient à cet événement.

5) L'événement $A \cap B$ est réalisé	SSI	les événements A et B sont réalisés tous les deux.
L'événement $A \cup B$ est réalisé	SSI	l'un des événements A ou B est réalisé.
L'événement A \ B est réalisé	SSI	l'événement A est réalisé sans que B ne le soit.

A = "obtenir un point impair" A = { }
B = "obtenir un point > 2" B = { }
$A \cap B$ = { }
$A \cup B$ = { }
A \ B = { }

6) A et B sont deux **événements contraires** si et seulement si les ensembles A et B sont complémentaires dans Ω. ($A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$)
Le complémentaire de A est $\Omega \setminus A = A^c$.

A = "obtenir un point impair" A = { }
B = "obtenir un point pair" B = { }
B = $\Omega \setminus A$, donc A et B sont deux événements contraires.

7) A et B sont deux **événements incompatibles** si et seulement si les deux événements ne peuvent se réaliser tous les deux. ($A \cap B = \emptyset$)

A = "obtenir un point impair" A = { }
B = "obtenir le point 2" B = { }
A et B sont des événements incompatibles.

2 Probabilités

La **probabilité** d'un événement d'une expérience aléatoire est un nombre attaché à cet événement.

Axiome 1 : A tout événement A, on associe un nombre réel, noté P(A), appelé probabilité de A et compris entre 0 et 1.

$\forall A \subset \Omega : 0 \leq P(A) \leq 1$

Axiome 2 : La probabilité de l'événement certain égale 1.

$P(\Omega) = 1$

Axiome 3 : Si A et B sont deux événements incompatibles, la probabilité de la réunion égale la somme des probabilités.

$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3 Equiprobabilité

Supposons que Ω soit fini et compte N éléments. Supposons que les événements élémentaires soient équiprobables. Alors la probabilité de chacun d'eux est 1/N (axiome 3).

Si A est un événement qui compte r éléments, alors P(A) = r/N.

Si A est l'événement "obtenir un point impair", A = {   }
P(A) =

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé rouge et un dé blanc.
Ω = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1)(2,2),...} comporte 36 éléments.
La probabilité de chaque singleton est .

Quelle est la probabilité P(A) d'amener 8 au total ?
A = {   }   et   P(A) =

Quelle est la probabilité P(B) d'amener des points identiques ?
B = {   }   et   P(B) =

Exercices :

On fait trois parties consécutives de "pile ou face".
Quelle est la probabilité d'obtenir

a) plus de face que de pile ?
b) exactement 2 fois pile ?
c) pile au troisième jet ?
d) trois fois la même face ?

Une urne contient deux boules, une blanche et une verte. On effectue successivement trois tirages d'une boule avec remise. Quelle est la probabilité

a) de tirer une fois la blanche et 2 fois la verte (sans ordre) ?
b) de tirer deux fois la blanche ?
c) de tirer au moins une fois la verte ?

P(a) =
P(b) =
P(c) =

On tire successivement et au hasard 4 lettres du mot "PROFITABLES". Quelle est la probabilité pour que, dans l'ordre du tirage, ces lettres forment le mot "RATE"?

P("RATE") =

Une urne contient cinq boules vertes et trois boules rouges. On tire trois boules au hasard, sans remise dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer trois boules vertes?

4 Principe d'addition

a) Soit A et A^c, deux événements contraires d'une même expérience aléatoire. Comme $A \cap A^c = \varnothing$ et $A \cup A^c = \Omega$, en appliquant l'axiome 3, on trouve:

$$P(A) + P(A^c) = 1 \qquad \text{et donc} \qquad P(A^c) = 1 - P(A)$$

Soit l'expérience aléatoire consistant à jeter 2 dés distincts et observer la somme des points obtenus. Recherchons la probabilité de l'événement A = "obtenir moins de 11".
Pour cela, calculons la probabilité de l'événement contraire A^C = "obtenir 11 ou 12":

$A^C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$
$P(A^C) =$
Donc $P(A) = 1 - P(A^C) =$

b) D'une manière générale, la loi d'addition est la suivante:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité de tirer une dame ou un coeur ?

$\# \Omega = 32$
A = "obtenir une dame" $\qquad P(A) =$
B = "obtenir un coeur" $\qquad P(B) =$
$A \cap B$ = "obtenir la dame de coeur" $\qquad P(A \cap B) =$

$P(A \cup B) =$

5 Principe de multiplication

A et B sont deux **événements indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

On lance un dé non pipé deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir un double six?
$P(A) =$

Une urne contient 3 boules vertes, 2 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement 3 boules, avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre 1 verte et 2 rouges?

A = "obtenir une verte au premier tirage" P(A) =
B = "obtenir une rouge au second tirage" P(B) =
C = "obtenir une rouge au dernier tirage" P(C) =
Ces événements sont indépendants, donc
$P(A \cap B \cap C) =$

Exercices :

D'un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité de tirer
a) un 10 ou un valet ?
b) un as, un roi ou une dame?
c) un as ou un coeur?

$P(10 \cup \text{valet}) = P(10) + P(\text{valet}) - P(10 \cap \text{valet}) =$
$P(\text{as} \cup \text{roi} \cup \text{dame}) = P(\text{as}) + P(\text{roi}) + P(\text{dame}) =$
$P(\text{as} \cup \text{coeur}) = P(\text{as}) + P(\text{coeur}) - P(\text{as} \cap \text{coeur}) =$

On lance deux dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6?
Même question avec trois dés.

P(au moins un 6) = 1 - P(aucun 6) =

Avec 3 dés :
P(au moins un 6) =

Une boîte contient 10 écrous et 10 vis. On choisit au hasard et sans remise deux pièces dans la boîte. Trouver la probabilité d'extraire un écrou et une vis.

P(1 écrou et 1 vis) =
=
=

On choisit au hasard et sans remise trois ampoules électriques parmi un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Quelle est la probabilité d'obtenir
a) aucune ampoule défectueuse
b) au moins une ampoule défectueuse?

P(a) =
P(b) =

On choisit au hasard l'une après l'autre et sans remettre 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de n'avoir que des piques?

P(5 piques) =

Vous avez devant vous deux boîtes identiques. Chacune de ces boîtes contient dans des emballages identiques deux pralines et deux marrons glacés. Il vous est possible de prendre deux friandises. Soit
a) une dans chaque boîte
b) deux dans la même boîte
c) mélanger le contenu des deux boîtes et ensuite choisir deux friandises.
Comme vous préférez les marrons glacés, vous voudriez en avoir deux. Quelle est la solution à choisir pour avoir le plus de chance d'être satisfait?

P(a) =
P(b) =
P(c) =

Pour une course, il y a quatre chevaux désignés par A, B, C et D. Les chevaux A et B appartiennent à la même écurie E et ont la même probabilité de gagner la course. Le cheval D a deux fois moins de chance de gagner que A et le cheval C en a deux fois plus. Calculer pour chaque cheval la probabilité de gagner.
Supposons maintenant que les mêmes chevaux se retrouvent au départ de trois courses dans les mêmes conditions. Trouver alors la probabilité que l'écurie E ne remporte aucune victoire. Trouver la probabilité qu'elle remporte au moins une victoire. Trouver la probabilité qu'elle remporte exactement deux victoires.

P(aucune victoire) =
P(au moins une) =
P(exactement 2) =

Dans une pièce se trouvent 30 personnes. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour (sans compter le 29 février)?

Une urne contient 20 boules dont 10 rouges. on en tire cinq au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir
a) 3 rouges exactement;
b) aucune rouge;
c) au moins deux rouges;
d) au plus trois rouges?

4 Probabilités conditionnelles

Une urne contient 5 boules noires et trois vertes. On tire au hasard deux boules sans remise. quelle est la probabilité de sortir dans l'ordre une noire puis une verte?

A = "tirer une noire au premier tirage" $P(A) = 5/8$
B = "tirer une verte au second tirage"
B|A = "tirer une verte en second si une noire a été tirée en premier"
$P(A \cap B) = 5/8 \, . \, P(B|A) = 5/8 \, . \, 3/7 = P(A) \, . \, P(B|A)$

Loi des probabilités conditionnelles

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B|A) = P(B) \, . \, P(A|B)$$

Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité de l'événement B, "obtenir une verte au second tirage"?
$A \cap B$ = "noire puis verte"
$A^C \cap B$ = "verte puis verte"
Ces deux événements sont incompatibles, $(A \cap B) \cap (A^C \cap B) = \varnothing$ et leur union donne $(A \cap B) \cup (A^C \cap B) = B$. Donc, par l'axiome 3:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(A) \, . \, P(B|A) + P(A^C) \, . \, P(B|A^C) \\ &= 5/8 \, . \, 3/7 + 3/8 \, . \, 2/7 \\ &= 15/56 + 6/56 = 21/56. \end{aligned}$$

Exercices:

D'un jeu bien mélangé de 52 cartes, on tire une carte et on observe le point. Quelle est la probabilité pour que la carte tirée soit un 8, sachant que la carte tirée a une valeur entre 5 et 10 inclus?

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) =$

Un paquet bien mélangé de 8 cartes contient les 4 as et les 4 rois. On tire au hasard deux cartes sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 as sachant qu'une des cartes tirées est

a) un as

b) un as rouge

c) l'as de pique?

a) P(2 as) =

P(au - 1 as) =

b) P(1 as rouge) =

P(2a $\cap$ 1 as rouge) =

c) P(as de pique) =

P(2 as | as de pique) =

On tire, sans remise, deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour que

a) la deuxième carte soit un as si la première est un pique

b) la deuxième carte soit un pique si la première est un as?

Quatre chevaux doivent participer à un grand prix. La probabilité de vaincre est 1/5 pour le cheval A, 2/5 pour le cheval B, 1/3 pour le cheval C et 1/15 pour le cheval D. Au moment du départ, le cheval C, malade, ne se présente pas. Que devient la probabilité de vaincre de chaque cheval?

La probabilité pour qu'un jour quelconque de mai soit non pluvieux est 0,8. Une équipe de football gagne ses matchs par temps clair avec une probabilité de 0,7; par temps de pluie avec une probabilité de 0,4. Sachant que cette équipe a gagné un match le 10 mai, quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour-là?

P = "pluie" G = "gagné"

$P(P \cap G) =$

$P(G \cap P^c) =$

$P(G) =$

Trois personnes essaient indépendamment de déchiffrer un message codé. Les probabilités que chacune le déchiffre sont respectivement 1/5, 1/4 et 1/3. Quelle est la probabilité que le message soit déchiffré?

P(déchiffré) =

Trois hommes visent une cible. Les probabilités de succès sont respectivement 1/6, 1/4 et 1/3. Chacun tire un coup.

a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement un coup au but?

b) S'il n'y a qu'un coup au but, quelle est la probabilité que ce soit celui du premier tireur?

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des coups atteigne la cible?

a) P(A) =

b)

c) P(au - 1) =

On dispose de trois jetons A, B et C tels que A ait 2 faces blanches, B une face blanche et une face noire et C 2 faces noires. On tire un jeton au hasard et on ne voit qu'une de ses faces. Elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'autre le soit également.

Deux tireurs à l'arc A et B s'entraînent à leur sport favori. La probabilité d'atteindre la cible est 1/4 pour A et 1/3 pour B.

a) Si chacun vise trois fois, quelle est la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois?

P(au - 1 fois) =

b) Si chacun tire une seule fois et si une flèche atteint la cible, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par A?

c) A tire deux fois. Trouver le nombre de fois que doit tirer B pour qu'il y ait une probabilité au moins égale à 0,9 que la cible soit atteinte par l'un d'eux.

Un homme a dans sa poche un trousseau de 6 clefs. Avant de rentrer chez lui, il constate qu'il a perdu une clef. Il doit ouvrir sa porte qui comporte deux serrures. Trouver

a) la probabilité qu'il sache ouvrir la porte

P(a) =

b) la probabilité qu'il puisse ouvrir la porte avec les deux premières clefs qu'il essaie.

P(b) =

Un test rapide pour détecter le cancer a été mis au point. Si un individu est cancéreux, il y a 95 chances sur 100 que le test réagisse positivement. Par contre, s'il est sain, il y a quand même 10 chances sur 100 que le test réagisse positivement. Dans une polulation donnée, on compte 18,5 % de réactions positives.

a) Si un individu est pris au hasard dans cette population, trouver la probabilité qu'il soit cancéreux et réagisse au test.

b) Trouver la proportion théorique de cancéreux dans cette population.

c) Si un individu choisi au hasard dans cette population a réagi positivement au test, trouver la probabilité que cet individu soit effectivement atteint du cancer.

Supposons que chaque jury d'un tribunal ait une probabilité 0,95 de rendre un jugement correct. Supposons de plus que la perspicacité des juges d'instruction soit telle qu'il y aitune probabilité 0,99 qu'une personne envoyée devant le tribunal soit réellement coupable.
Trouver la probabilité qu'une personne déclarée innocente par le tribunal, le soit en réalité.

Trouver le nombre minimum de lancers d'un dé à six faces qu'il faut effectuer pour avoir une probabilité supérieure à un demi d'obtenir au moins une fois le point six. Même question avec deux dés à six faces et le point double six.